معاك
Ma3ak App

التطبيق التفاعلى للتعلم عن بعد

الصف الثانى الإعدادى

الفصل الدراسى الأول

الكتاب الأساسى

- الجبر و الإحصاء
- الهندسة

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

2021

محتويات الكتاب

مشروع بحثي في نهاية كل وحدة

أولًا : الجبر والإحصاء







ثانيًا : الهندســـة





أولاً الجبر والإحصاء



مراجعة

مجموعات الأعداد

درست فيما سبق مجموعات الأعداد الآتية :

• مجموعة أعداد العد : ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

• مجموعة الأعداد الطبيعية : ط = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...} = ع ∪ {٠}

• مجموعة الأعداد الصحيحة : ص = {... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، -١ ، -٢ ، -٣ ، ...}

• مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة : $ص_+$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...} = ع

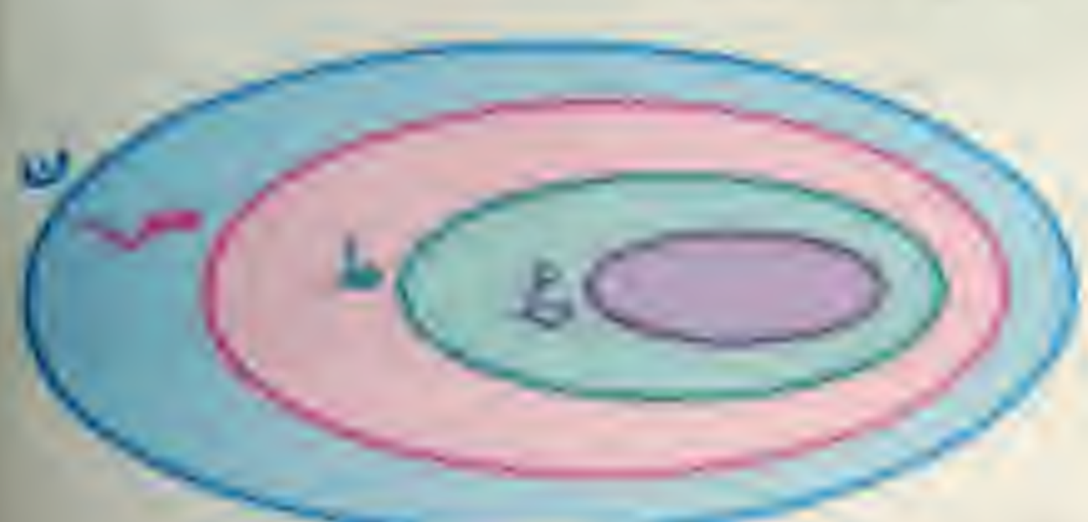
• مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة : $ص_-$ = {-١ ، -٢ ، -٣ ، ...}

• مجموعة الأعداد النسبية : ن = {$\frac{أ}{ب}$: أ ∈ ص ، ب ∈ ص ، ب ≠ ٠}

أمثلة لأعداد نسبية : $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٢}$ ، صفر ، ٣ ، -٥ ، ٠,٢ ، ٢٥٪ ، ...

لاحظ أن : ع ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ن

والشكل المقابل يوضح ذلك.



وضع العدد النسبى فى أبسط صورة

لوضع العدد النسبى $\frac{أ}{ب}$ فى أبسط صورة :

نقسم كلاً من حديه على العامل المشترك الأعلى (ع.م.أ) بينهما إن وجد.

فمثلاً : لوضع العدد النسبى $\frac{٨}{١٢}$ فى أبسط صورة

نقسم كلاً من حديه ٨ ، ١٢ على العامل المشترك الأعلى بينهما وهو ٤ كالتالى :

$\frac{٨}{١٢} = \frac{٨ \div ٤}{١٢ \div ٤} = \frac{٢}{٣}$ فتكون $\frac{٢}{٣}$ هى أبسط صورة للعدد النسبى $\frac{٨}{١٢}$

القيمة المطلقة للعدد النسبى

يرمز للقيمة المطلقة للعدد أ بالرمز |أ| حيث |أ| ≥ ٠

فمثلاً : • |٤| = ٤ • |−٤| = ٤ • |صفر| = صفر

ملاحظة

إذا كان : |س| = أ فإن : س = أ أو س = −أ

فمثلاً : إذا كان : |س| = ٥ فإن : س = ٥ أو س = −٥

الأسس

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين ، م ، ن عددين صحيحين فإن :

		أمثلة
١	$أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$	$٥^{-١} = \frac{١}{٥}$
٢	$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$	$٢^{٣} \times ٢^{٢} = ٢^{٣+٢} = ٢^{٥} = ٣٢$
٣	$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$	$\frac{٣^{٢}}{٣^{-١}} = ٣^{٢-(-١)} = ٣^{٢+١} = ٣^{٣} = ٢٧$
٤	$(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$	$(٥ \times ١٠)^{٢} = ٥^{٢} \times ١٠^{٢} = ٢٥ \times ١٠٠ = ٢٥٠٠$
٥	$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$	$\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} = \frac{٣^{٢}}{٤^{٢}} = \frac{٩}{١٦}$
٦	$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$	$(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٢\times٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

الصورة القياسية للعدد النسبى

يكون العدد النسبى فى صورته القياسية إذا كان على الصورة :

$أ \times ١٠^{ن}$ حيث ن ∈ ص ، $١ \leq |أ| < ١٠$

فمثلاً : • الصورة القياسية للعدد $٣٢,٤ \times ١٠^{٥}$ هى $٣,٢٤ \times ١٠^{٦}$

• الصورة القياسية للعدد ٠,٠٠٠٤٢٣ هى $٤,٢٣ \times ١٠^{-٤}$

العدد النسبى المربع الكامل

هو العدد النسبى الذى يمكن كتابته على صورة مربع عدد نسبى أى على صورة (عدد نسبى)^{٢}

فمثلاً العدد ٩ هو عدد نسبى مربع كامل لأنه يمكن كتابته على الصورة $(٣)^{٢}$ أو $(-٣)^{٢}$

ومن أمثلة الأعداد النسبية المربعات الكاملة : ١ ، ٤ ، $\frac{٩}{٢٥}$ ، $\frac{١٦}{٤٩}$ ، ٢,٢٥ ، ...

الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل

الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل ؟ هو العدد النسبى الذى مربعه يساوى ؟

فمثلاً • العدد ٢٥ له جذران تربيعيان هما : ٥ ، -٥

لأن : $(٥)^{٢} = ٢٥$ ، $(-٥)^{٢} = ٢٥$

• العدد $\frac{١٦}{٤٩}$ له جذران تربيعيان هما : $\frac{٤}{٧}$ ، $-\frac{٤}{٧}$

لاحظ أن

الجذران التربيعيان للعدد النسبى كل منهما معكوس جمعى للآخر ومجموعهما يساوى الصفر.

ملاحظة

الرمز $\sqrt{\ }$ يدل على الجذر التربيعى الموجب لعدد ما وعلى هذا فإن :

• $\sqrt{١٦} = ٤$ ، $-\sqrt{١٦} = -٤$ ، $\pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$

• $\sqrt{صفر} = صفر$ • $\sqrt{عدد\ سالب}$ ليس له معنى.

• $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$

فمثلاً : $\sqrt{٣^{٢}} = |٣| = ٣$ ، $\sqrt{(-٦)^{٢}} = |-٦| = ٦$ ، $\sqrt{\left(-\frac{٢}{٥}\right)^{٢}} = \left|-\frac{٢}{٥}\right| = \frac{٢}{٥}$

• أحياناً نلجأ إلى تحليل العدد إلى عوامله الأولية لتسهيل إيجاد جذره التربيعى ، ثم نأخذ من كل عاملين متساويين عاملاً واحداً ، فيكون حاصل ضرب هذه العوامل هو الجذر التربيعى لهذا العدد.

فمثلاً : ∵ $٤٤١ = ٣ \times ٣ \times ٧ \times ٧$

∴ $\sqrt{٤٤١} = ٣ \times ٧$

$= ٢١$

٤٤١	٣
١٤٧	٣
٤٩	٧
٧	٧
١	

(٣) ، (٧)

«يمكنك التأكد من الحل باستخدام الآلة الحاسبة».

حل المعادلات

مثال

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

1. س + ٢ = |−٢| ، س ∈ ط
2. ٢ س − ٥ = ١٣ ، س ∈ ن
3. س^{٢} − ٤ = ٥ ، س ∈ ن
4. س^{٢} + ٢٥ = ٠ ، س ∈ ن

الحل

1. ∵ س + ٢ = ٢ ∴ س = ٢ − ٢
∴ س = ٠ ∴ مجموعة الحل = {٠}

2. ∵ ٢ س − ٥ = ١٣ ∴ ٢ س = ١٣ + ٥
∴ ٢ س = ١٨ ∴ س = $\frac{١٨}{٢}$
∴ س = ٩
∴ مجموعة الحل = {٩}

3. ∵ س^{٢} − ٤ = ٥ ∴ س^{٢} = ٥ + ٤
∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ± $\sqrt{٩}$
∴ س = ± ٣
∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

لاحظ أننا

استخدمنا مفهوم الجذر التربيعي في إيجاد قيمة س طبقًا للملاحظة الآتية :

إذا كان : س^{٢} = أ فإن : س = ± $\sqrt{أ}$

4. ∵ س^{٢} + ٢٥ = ٠ ∴ س^{٢} = −٢٥
∴ س = ± $\sqrt{-٢٥}$ ∉ ن (لاحظ أنه: لا يوجد في ن جذر تربيعي لعدد نسبي سالب)
∴ مجموعة الحل = ∅



تمرينات المراجعة

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل بوضع كل من الأعداد الآتية على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ليس بينهما عوامل مشتركة ، ب ≠ ٠ :

١ ٠,٣ = ... ٢ ٠,٠٣ = ... ٣ ٢٥٪ = ...

٤ |−٠,٧٥| = ... ٥ −٦ = ... ٦ $١\frac{١}{٤}$ = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ص₊ ∪ {٠} = ...

(أ) ص (ب) ط (جـ) ع (د) ن

٢ |−٢| + |−٤| + |٦| = ...

(أ) صفر (ب) |−١٢| (جـ) −١٢ (د) ٦

٣ $\sqrt{أ^٢}$ = ...

(أ) أ (ب) −أ (جـ) |أ| (د) ± أ

٤ مجموعة حل المعادلة : س + ٥ = |−٥| فى ط هى ....

(أ) {٠} (ب) {١٠} (جـ) {−١٠} (د) ∅

٥ أى من الأعداد النسبية الآتية يقع بين $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ؟

(أ) $\frac{٢}{١٠}$ (ب) $\frac{١}{١٠}$ (جـ) ٠,٣ (د) −٠,٣

٦ حاصل ضرب العدد النسبى $\frac{أ}{ب}$ فى معكوسه الجمعى = ...

(أ) صفر (ب) $-\frac{أ}{ب}$ (جـ) $\frac{أ^٢}{ب^٢}$ (د) $-\frac{أ^٢}{ب^٢}$

٧ $٣^{١٠} + ٣^{١٠} + ٣^{١٠}$ = ...

(أ) $٣^{١٠}$ (ب) $٣^{٣٠}$ (جـ) $٩^{١٠}$ (د) $٣^{١١}$

٨ إذا كان $أ^{-١} = \frac{٢}{٣}$ فإن أ = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) ١

٩ المعكوس الضربى للعدد $٥^{-١}$ هو ....

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) $-\frac{١}{٥}$

٣ أكمل ما يأتى :

١ $\sqrt{٢٥ + ١٤٤} =$ ....

٢ $\sqrt{٠,٢٥} =$ ....

٣ $-|-٥| - |٢| =$ ....

٤ $-\sqrt{٢٥} + |-٥| =$ ....

٥ $\sqrt{٠,١٦} + |-٠,٦| =$ ....

٦ $\frac{\sqrt{٢٥ - ٩}}{\sqrt{٢٥} - \sqrt{٩}} =$ ....

٧ الصورة القياسية للعدد ٠,٠٠٠١٥ هى ....

٨ الصورة القياسية للعدد ٤٢١×١٠^{٣} هى ....

٩ $٢^{٠} + ٢^{١} + ٢^{٢} + ٢^{٣} =$ ....

١٠ مجموع الجذرين التربيعيين للعدد $٢\frac{١}{٤} =$ ....

١١ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} \times \sqrt{\frac{٨١}{١٦}} \times \left(\frac{٧}{٩}\right)^{صفر} =$ ....

أوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

١ ٥ س + ٣ = ٢٠

٢ ٧ س + ١١ = ١٢

٣ ٣ س + ٥ = ١

٤ س + ٣ = ٧

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث س ∈ ن :

١ $س^{٢} + ١٢ = ٢١$

٢ $٢ س^{٢} - ١ = -٩$

الوحدة

1

الأعـداد الحقيقيـة



دروس الوحدة :



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف الجذر التكعيبى لعدد نسبى.
- يوجد الجذر التكعيبى لعدد نسبى.
- يتعرف مجموعة الأعداد غير النسبية.
- يمثل العدد غير النسبى على خط الأعداد.
- يتعرف مجموعة الأعداد الحقيقية.
- يجرى العمليات على الفترات.
- يجرى العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.
- يحل معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح
- يجرى العمليات على الجذور التربيعية والتكعيبية.
- يتعرف العددين المترافقين.
- يطبق ما تعلمه فى الأعداد الحقيقية لإيجاد حجوم ومساحات بعض المجسمات.



الدرس
1

الجذر التكعيبى للعدد النسبى

• حاصل ضرب عدد ما فى نفسه ثلاث مرات هو مكعب هذا العدد.

فمثلًا : العدد ٦٤ هو مكعب العدد ٤ لأن : ٤ × ٤ × ٤ = ٦٤

• العملية العكسية لإيجاد المكعب هى إيجاد الجذر التكعيبى ، فإيجاد الجذر التكعيبى لعدد ما يعنى إيجاد العدد الذى إذا ضُرب فى نفسه ثلاث مرات نحصل على هذا العدد.

فمثلًا : العدد ٤ هو الجذر التكعيبى للعدد ٦٤ لأن : ٦٤ = ٤ × ٤ × ٤

تعريف

الجذر التكعيبى للعدد أ هو العدد الذى مكعبه يساوى أ

• يستخدم الرمز $\sqrt[3]{\ \ }$ (ويُقرأ : الجذر التكعيبى) للتعبير عن الجذر التكعيبى لأى عدد.

فمثلًا : نرمز للجذر التكعيبى للعدد ٦٤ بالرمز $\sqrt[3]{٦٤}$

• الجذر التكعيبى للعدد الموجب يكون موجبًا ، والجذر التكعيبى للعدد السالب يكون سالبًا.

فمثلًا : $\sqrt[3]{٦٤} = ٤$ ، $\sqrt[3]{-٦٤} = -٤$

أى أن : الجذر التكعيبى لأى عدد يكون له نفس إشارة هذا العدد.

إيجاد الجذر التكعيبى لعدد نسبى مكعب كامل

- العدد النسبى المكعب الكامل هو العدد النسبى الذى يمكن كتابته على صورة مكعب عدد نسبى أى $(\text{عدد نسبى})^{٣}$ مثلا: $٨ = ٢^{٣}$ ، $-٢٧ = (-٣)^{٣}$
- الجذر التكعيبى لعدد نسبى مكعب كامل هو عدد نسبى ، فمثلاً: $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ ، $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$
- إذا كان العدد ليس مكعبًا كاملاً فإننا نكتب جذره التكعيبى باستخدام رمز الجذر التكعيبى. فمثلاً: الجذر التكعيبى للعدد ٤ هو $\sqrt[٣]{٤}$ لأن العدد ٤ ليس مكعبًا كاملاً.
- يمكن إيجاد الجذر التكعيبى لعدد نسبى مكعب كامل عن طريق التحليل كما فى المثال التالى.

مثال ١

أوجد كلًا مما يأتى : ١ $\sqrt[٣]{٢١٦}$ ٢ $\sqrt[٣]{-\frac{٨}{١٢٥}}$ ٣ $\sqrt[٣]{٠,٠٦٤}$

الحل

١ $\sqrt[٣]{٢١٦} = ٢ \times ٣ = ٦$

٢١٦	٢
١٠٨	٢
٥٤	٢ (٢)
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣ (٣)
١	

٢ $\sqrt[٣]{-\frac{٨}{١٢٥}} = -\frac{٢}{٥}$

٨	٢
٤	٢
٢	٢ (٢)
١	

١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥ (٥)
١	

٣ $\sqrt[٣]{٠,٠٦٤} = \sqrt[٣]{\frac{٦٤}{١٠٠٠}} = \frac{٢ \times ٢}{٢ \times ٥}$

$= \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$

٦٤	٢
٣٢	٢
١٦	٢ (٢)
٨	٢
٤	٢
٢	٢ (٢)
١	

١٠٠٠	٢
٥٠٠	٢
٢٥٠	٢ (٢)
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥ (٥)
١	

حاول بنفسك ١

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $\sqrt[٣]{١٧٢٨}$ ٢ $\sqrt[٣]{-٠,٢١٦}$ ٣ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$

الإجابات النهائية

لأسئلة حاول بنفسك فى نهاية كل درس للتأكد من إجابتك.

ملاحظات

- $\sqrt[3]{أ^3} = أ$ فمثلًا : $\sqrt[3]{5^3} = 5$ ، $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
- $\sqrt[3]{أ^{ن}} = أ^{\frac{ن}{3}}$ حيث $ن \in ص$ فمثلًا : $\sqrt[3]{أ^6} = أ^{\frac{6}{3}} = أ^2$
- إذا كان : أ عددًا مكعبًا كاملًا فإن المعادلة : $س^3 = أ$ لها حل وحيد فى ن هو $\sqrt[3]{أ}$

فمثلًا : * المعادلة : $س^3 = 8$ لها حل وحيد فى ن هو $\sqrt[3]{8}$ والذى يساوى ٢

* المعادلة : $س^3 = 9$ ليس لها حل فى ن لأن العدد ٩ ليس مكعبًا كاملًا.

مثال ٢

حل كلًا من المعادلتين الآتيتين فى ن :

١ $40 س^3 - 1 = -136$　　٢ $(ص - 2)^3 = -343$

الحل

١ $\because 40 س^3 - 1 = -136$　　$\therefore 40 س^3 = -136 + 1$

$\therefore 40 س^3 = -135$　　$\therefore س^3 = \frac{-135}{40}$

$\therefore س^3 = \frac{-27}{8}$　　$\therefore س = \sqrt[3]{\frac{-27}{8}}$　　$\therefore س = \frac{-3}{2}$

٢ $\because (ص - 2)^3 = -343$ وبأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$\therefore \sqrt[3]{(ص - 2)^3} = \sqrt[3]{-343}$　　$\therefore ص - 2 = -7$

$\therefore ص = -7 + 2$　　$\therefore ص = -5$

حاول بنفسك ٢

أوجد فى ن مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ $27 س^3 - 2 = 62$　　٢ $(5 س - 3)^3 - 2 = 6$

تطبيقات

تذكر أن

- حجم المكعب = طول الحرف × نفسه × نفسه
- مساحة الوجه الواحد للمكعب = طول الحرف × نفسه
- المساحة الجانبية للمكعب = مساحة الوجه × ٤
- المساحة الكلية للمكعب = مساحة الوجه × ٦



فمثلًا : **إذا كان حجم مكعب ٨ سم^{٣} فإن :**

- طول حرفه = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ سم
- مساحة وجهه = ٢ × ٢ = ٤ سم^{٢}
- مساحته الجانبية = ٤ × ٤ = ١٦ سم^{٢}
- مساحته الكلية = ٤ × ٦ = ٢٤ سم^{٢}

مثال ٢

أوجد كلاً مما يأتى :

١ طول الحرف الداخلى بالسنتيمتر لإناء مكعب الشكل سعته ٨ لتر.

٢ طول نصف قطر كرة حجمها $\frac{٣٦}{١٢٥}$ π سم^{٣} **علمًا بأن :** حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

حيث : نق طول نصف قطر الكرة ، π النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

٣ طول قطر كرة حجمها ٣٨٨٫٨ سم^{٣} $\left(\pi \approx \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحل

١ ∵ سعة الإناء = ٨ لتر = ٨ × ١٠٠٠ = ٨٠٠٠ سم^{٣}

∴ طول حرف الإناء الداخلى = $\sqrt[٣]{٨٠٠٠}$ = ٢٠ سم

تذكر أن

١ لتر = ١٠٠٠ سم^{٣}

٢ ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

∴ $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} = $\frac{٣٦}{١٢٥}$

∴ نق^{٣} = $\frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = $\frac{٣٦}{١٢٥}$ π

∴ نق^{٣} = $\frac{٣٦}{١٢٥}$ × $\frac{٣}{٤}$

∴ نق = $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{١٢٥}}$ = $\frac{٣}{٥}$ سم

∴ طول نصف قطر الكرة = $\frac{٣}{٥}$ سم

٣ ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

∴ $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٣} = ٣٨٨٠٨

∴ نق^{٣} = ٣٨٨٠٨ × $\frac{٢١}{٨٨}$

∴ نق = $\sqrt[٣]{٩٢٦١}$

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} = ٣٨٨٠٨

∴ $\frac{٨٨}{٢١}$ نق^{٣} = ٣٨٨٠٨

∴ نق^{٣} = ٩٢٦١

∴ نق = ٣ × ٧ = ٢١ سم

٩٢٦١	٣
٣٠٨٧	٣
١٠٢٩	٣
٣٤٣	٧
٤٩	٧
٧	٧
١	

(٣) (٧)

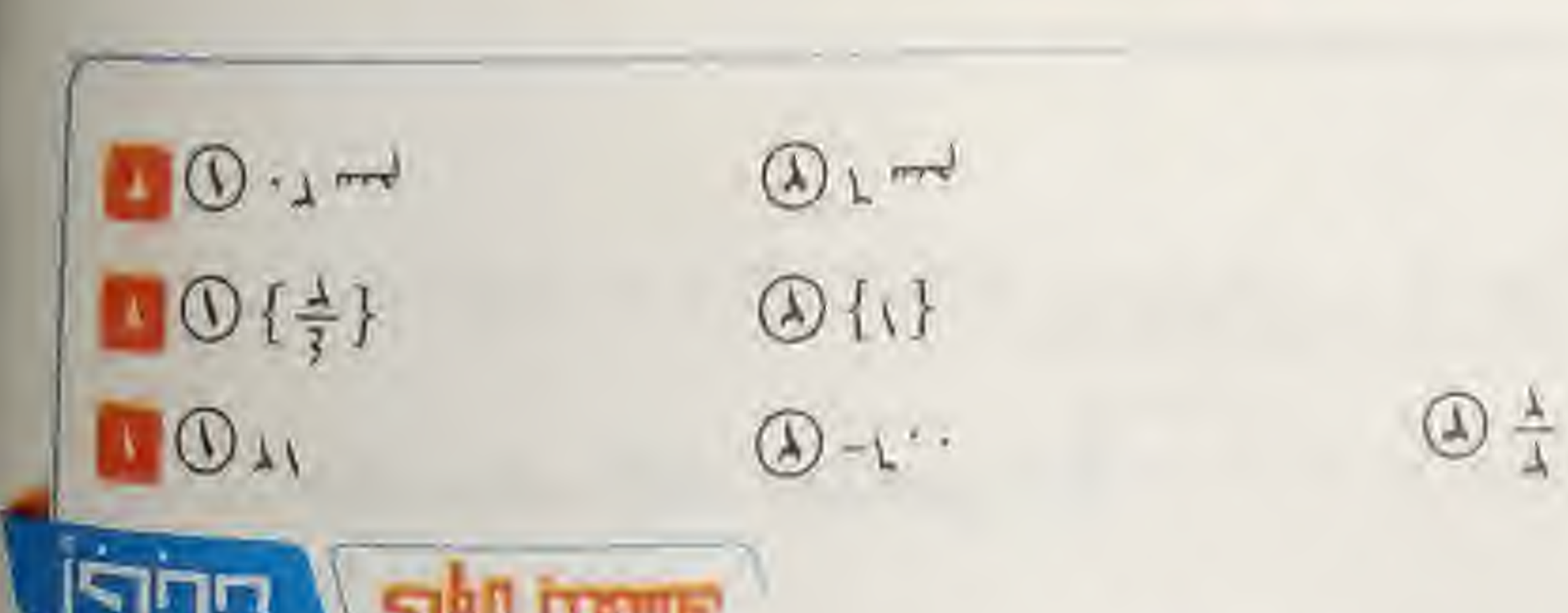
∴ طول قطر الكرة = ٢١ × ٢ = ٤٢ سم

لاحظ أنه : يمكنك استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد $\sqrt[٣]{٩٢٦١}$ مباشرة.

حاول بنفسك ٢

١ أوجد طول الحرف الداخلى لإناء على شكل مكعب سعته ٢٧ لترًا.

٢ أوجد طول قطر كرة حجمها ٣٦ π سم^{٣} (علمًا بأن : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣})



في نهاية كل درس
ستجد الإجابات النهائية لأسئلة حاول بنفسك بنفس هذا الشكل

تمارين 1

على الجذر التكعيبي للعدد النسبي

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الجدول الآتي :

العدد ا	٨	١٢٥	-٢٧	......	$٣\frac{٣}{٨}$	$\frac{٨}{١٢٥}$	......	......
$\sqrt[3]{ا}$	......	......	......	-١٠	......	......	٦	-٤

٢ أوجد كلًا مما يأتي :

١) $\sqrt[3]{٢١٦}$

٢) $\sqrt[3]{-٣٤٣}$

٣) $\sqrt[3]{\frac{٦٤}{١٢٥}}$

٤) $\sqrt[3]{\frac{٨}{٢٧}}$

٥) $\sqrt[3]{٠{,}٠٠١}$

٦) $\sqrt[3]{٢\frac{١٠}{٢٧}}$

٧) $\sqrt[3]{٨ س^٣}$

٨) $\sqrt[3]{-٢٧ ا^٣}$

٣ أكمل :

١) $\sqrt[3]{ا^٣} =$ ......

٢) $\sqrt[3]{......} = ٤$

٣) $\sqrt{١٦} = \sqrt[3]{......}$

٤) $|\sqrt[3]{-١٢٥}| = \sqrt{......}$

٥) $\sqrt[3]{٨} + \sqrt[3]{-٨} =$ ......

٦) $\sqrt[3]{٢٧} - \sqrt[3]{٦٤} =$ ......

٧) $\sqrt[3]{٢٧} - \sqrt[3]{-٢٧} =$ ......

٨) $\sqrt{٩} + \sqrt[3]{-٨} =$ ......

٩) $\sqrt[3]{٦٤} - \sqrt{٦٤} =$ ......

١٠) $-\sqrt[3]{-١} - \sqrt{١} =$ ......

١١) $\frac{-\sqrt[3]{٦٤}}{\sqrt{٦٤}} =$ ......

١٢) $\sqrt[3]{٦٤ + ...} = ٥$

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $\sqrt[3]{(-٨)^٢} =$ ......

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) -٤

٢) $\sqrt[3]{\left(\frac{١}{٨}\right)^٢} =$ ......

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

٣ $\sqrt[3]{-64} + \sqrt{16} = $ ....

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ±٨

٤ $\sqrt{25} - \sqrt[3]{-125} = $ ....

(أ) ١٠ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ±٥

٥ $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt[3]{(-2)^3} = $ ....

(أ) −٤ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) صفر

٦ $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt{0,25} = $ ....

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ٢ (د) −٢

٧ $\sqrt[3]{0,001 \times \frac{1}{8}} = $ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{1}{20}$ (د) ٢٠

٨ $\sqrt[3]{1[illegible]} \times \sqrt[3]{-[illegible]} = $ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) −٢

٩ $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{12\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{0,125} = $ ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) $\frac{11}{2}$

١٠ إذا كان : $-\sqrt{25} = \sqrt[3]{ص}$ فإن : ص = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١٢٥ (د) −١٢٥

١١ إذا كان : $س^2 = 64$ فإن : $\sqrt[3]{س} = $ ....

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

١٢ $\sqrt[3]{\text{س}^{٣}} = \sqrt{\text{.......}}$

(أ) $\text{س}^{٩}$ (ب) $\text{س}^{٢}$ (جـ) س (د) $\text{س}^{٤}$

١٣ إذا كان $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{٩}{\text{س}^{٢}}$ فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

٥ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

١ $\sqrt[3]{\text{س}} = ٥$

٢ $\sqrt[3]{\text{س}} = -\frac{١}{٤}$

٣ $\sqrt[3]{\text{س}} = -\sqrt{٤}$

٤ $\sqrt[3]{\text{س}} - ٣ = -١$

٥ $\text{س}^{٣} = -٨$

٦ $\text{س}^{٣} = ٦٤$

٧ $\text{س}^{٣} + ٥ = ٣٢$

٨ $٢\,\text{س}^{٣} = ٥٤$

٩ $\frac{١}{٥}\,\text{س}^{٣} = -٢٠٠$

٦ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ن :

١ $\text{س}^{٣} + ٢٧ = ٠$

٢ $٨\,\text{س}^{٣} + ٧ = ٨$

٣ $\text{س}^{٣} + ١٦ = \frac{٣}{٨}$

٤ $٢\,\text{س}^{٣} - ٥ = \text{س}^{٣} + ٣$

٥ $(\text{س} + ٣)^{٣} = ٣٤٣$

٦ $(٣\,\text{س} + ١)^{٣} = -٨$

٧ $(٢\,\text{س} + ١)^{٣} - ٧ = ٢٠$

٨ $(٥\,\text{س} - ٢)^{٣} + ١٠ = ١٨$

٧ أوجد كلًا مما يأتى :

١ $\sqrt[3]{٢\frac{١}{٤} \div \frac{٢}{٣}}$

٢ $-\sqrt[3]{٢^{٩} \times ٣^{٦}}$

٣ $\sqrt{\sqrt[3]{٧٢٩}}$

٤ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{٥١٢}}$

٥ $\sqrt{٢٧\sqrt[3]{٢٧}}$

تطبيقات

٨ أوجد طول حرف مكعب حجمه $15\frac{5}{8}$ سم^3

٩ أوجد المساحة الكلية لمكعب حجمه ٢١٦ سم^3

١٠ عدد مكعبه يساوى ٢٧ أوجد مربع هذا العدد.

١١ إذا كان نصف مكعب عدد يساوى ٣٢ فما هو العدد ؟

١٢ إناء مكعب سعته لتر واحد. احسب طول حرفه الداخلى.

١٣ كرة حجمها $\frac{1372}{81}\pi$ وحدة مكعبة فأوجد طول قطرها (حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3)

١٤ أوجد طول قطر الكرة التى حجمها ١١٣٫٠٤ سم^3 ($\pi = 3.14$)

للمتفوقين

١٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ن :

١ $(س^2 + 6)^3 = 1000$

٢ $(س^2 - 14)^2 = 169$

٣ $\sqrt[3]{(س - 1)^2} = \sqrt[3]{25}$

٤ $\sqrt[3]{(س - 2)(س^2 - 4س + 4)} = 3$

١٦ إذا كان : $\sqrt[3]{\sqrt{س} + 19} = 3$ فأوجد قيمة : $\sqrt[3]{س}$

١٧ سُئل رجل عن عمر والده وأعمار أبنائه الثلاثة فأجاب كالآتى :

عمرى نصف عمر والدى ، وعمر ابنى الأكبر هو الجذر التربيعى لعمر والدى ، وعمر ابنى الأوسط هو الجذر التكعيبى لعمر والدى ، وعمر ابنتى الصغرى هو خارج قسمة عمر ابنى الأكبر على عمر ابنى الأوسط. مع العلم أن عمر ابنى الأكبر ضعف عمر ابنى الأوسط. فما عمر كل من والده وأبنائه الثلاثة ؟



الدرس **2**

مجموعة الأعداد غير النسبية ($\bar{ن}$)

تمهيد

* درست سابقًا أن العدد النسبى هو العدد الذى يمكن وضعه على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب $\neq$ ٠ ، ويُرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز ن

* وبناءً على التعريف السابق علمت أن :

جميع الأعداد الصحيحة هى أعداد نسبية	جميع الأعداد والكسور العشرية هى أعداد نسبية	جميع النسب المئوية هى أعداد نسبية
فمثلًا : ٣ عدد نسبى لأنه يمكن التعبير عنه فى صورة : $\frac{٣}{١}$ أو $\frac{٦}{٢}$ أو ...	فمثلًا : ٢,٥ عدد نسبى لأنه يمكن التعبير عنه فى صورة : $\frac{٢٥}{١٠}$ أو $\frac{٥}{٢}$ أو ...	فمثلًا : ١٥٪ عدد نسبى لأنه يمكن التعبير عنه فى صورة : $\frac{١٥}{١٠٠}$ أو $\frac{١٥٠}{١٠٠٠}$ أو ...

الجذر التربيعى للعدد النسبى المربع الكامل هو عدد نسبى

فمثلًا : $\sqrt{٣٦}$ ، $\sqrt{\frac{٤}{٢٥}}$ ، $\sqrt{٠,٠٩}$ جميعها أعداد نسبية

حيث : $\sqrt{٣٦} = ٦$ ، $\sqrt{\frac{٤}{٢٥}} = \frac{٢}{٥}$ ، $\sqrt{٠,٠٩} = \sqrt{\frac{٩}{١٠٠}} = \frac{٣}{١٠}$

الجذر التكعيبى للعدد النسبى المكعب الكامل هو عدد نسبى

فمثلاً : $\sqrt[3]{٨}$ ، $\sqrt[3]{-٦٤}$ ، $\sqrt[3]{\frac{٢٧}{١٠٠٠}}$ جميعها أعداد نسبية

حيث : $\sqrt[3]{٨} = ٢$ ، $\sqrt[3]{-٦٤} = -٤$ ، $\sqrt[3]{\frac{٢٧}{١٠٠٠}} = \frac{٣}{١٠}$

الأعداد غير النسبية

الجذر التربيعى للعدد النسبى الذى هو ليس مربعًا كاملاً هو عدد غير نسبى

فمثلاً :

$\sqrt{٢} \notin$ ن لأنه لا يمكن إيجاد عدد نسبى مربعه يساوى ٢

وبالتالى : $\sqrt{٢}$ لا يمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

الجذر التكعيبى للعدد النسبى الذى هو ليس مكعبًا كاملاً هو عدد غير نسبى

فمثلاً :

$\sqrt[3]{٤} \notin$ ن لأنه لا يمكن إيجاد عدد نسبى مكعبه يساوى ٤

وبالتالى $\sqrt[3]{٤}$ لا يمكن كتابته على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددين صحيحين ، ب ≠ ٠

العدد π أو ط هو عدد غير نسبى

(على الرغم من أن : $\frac{٢٢}{٧}$ ، ٣,١٤ ، ٣,١٤٢ أعداد نسبية وكل منها يمثل قيمة تقريبية للعدد غير النسبى π)

أمثلة أخرى لأعداد غير نسبية

$\sqrt{٥} + ١$ ، $١ - \sqrt[3]{٧}$ ، $٢\sqrt{٧}$ ، $-\frac{\sqrt[3]{٩}}{٥}$

مجموعة الأعداد غير النسبية يُرمز لها بالرمز نَ

مع ملاحظة أن : ن ، نَ مجموعتان منفصلتان أى أن : ن ∩ نَ = ∅

مثال ١

بيّن أى الأعداد الآتية ينتمى إلى ن وأيها ينتمى إلى نَ :

١ $\sqrt{٠,٤٩}$

٢ $\sqrt[3]{-٠,٠٦٤}$

٣ $\sqrt{\frac{٢٥}{٤٩}}$

٤ $\sqrt[3]{\frac{٢٥}{٤٩}}$

٥ $\sqrt{٢٥} + \sqrt[3]{١٦}$

الحـــل

1. ∵ $\sqrt{0.49} = 0.7 = \frac{7}{10}$ ∴ $\sqrt{0.49} \in$ ن
2. ∵ $\sqrt[3]{-0.064} = -0.4 = -\frac{4}{10}$ ∴ $\sqrt[3]{-0.064} \in$ ن
3. ∵ $\sqrt{\frac{25}{49}} = \sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{5}{7}$ ∴ $\sqrt{\frac{25}{49}} \in$ ن
4. ∵ $\sqrt[3]{\frac{25}{49}} \notin$ ن لأنه لا يوجد عدد نسبى مكعبه يساوى $\frac{25}{49}$ ∴ $\sqrt[3]{\frac{25}{49}} \in$ ن̄
5. ∵ $\sqrt{25} + \sqrt[3]{16} = 5 + \sqrt[3]{16}$
   ، ∵ لا يوجد عدد نسبى مكعبه = 16 ∴ $\sqrt[3]{16} \notin$ ن
   ∴ $(5 + \sqrt[3]{16}) \notin$ ن ∴ $(\sqrt{25} + \sqrt[3]{16}) \in$ ن̄

ملاحظة

- $(\sqrt{أ})^2 = \sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$ حيث أ ≥ 0 . فمثلاً : $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$
- $(\sqrt[3]{أ})^3 = \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} = أ$ حيث أ ∈ ن فمثلاً : $(\sqrt[3]{-7})^3 = \sqrt[3]{-7} \times \sqrt[3]{-7} \times \sqrt[3]{-7} = -7$

مثال 2

إذا كانت س ∈ ن̄ فأوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :

1. $س^2 = 5$
2. $س^3 = 7$
3. $\frac{2}{5} س^2 = \frac{4}{25}$
4. $64 س^3 - 2 = -29$
5. $(س^2 - 10)(س^3 - 4) =$ صفر

الحـــل

1. ∵ $س^2 = 5$ ∴ $س = \pm\sqrt{5}$
   ∴ مجموعة الحل = $\{\sqrt{5} ، -\sqrt{5}\}$

$\therefore$ س = $\sqrt[3]{7}$

٢ $\because$ س^3 = ٧

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\sqrt[3]{7}\}$

٣ $\because$ $\frac{٢}{٥}$ س^2 = $\frac{٤}{٢٥}$ $\therefore$ س^2 = $\frac{٤}{٢٥}$ × $\frac{٥}{٢}$

$\therefore$ س^2 = $\frac{٢}{٥}$ $\therefore$ س = $\pm\sqrt{\frac{٢}{٥}}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\sqrt{\frac{٢}{٥}}$ ، $-\sqrt{\frac{٢}{٥}}\}$

٤ $\because$ ٦٤ س^3 - ٢ = -٢٩ $\therefore$ ٦٤ س^3 = -٢٩ + ٢ $\therefore$ ٦٤ س^3 = -٢٧

$\therefore$ س^3 = $-\frac{٢٧}{٦٤}$ $\therefore$ س = $\sqrt[3]{-\frac{٢٧}{٦٤}}$ $\therefore$ س = $-\frac{٣}{٤}$

، $\because$ $-\frac{٣}{٤}$ $\in$ ن $\therefore$ $-\frac{٣}{٤}$ $\notin$ نَ $\therefore$ مجموعة الحل = $\emptyset$

٥ $\because$ (س^2 - ١٠) (س^3 - ٤) = ٠

$\therefore$ إما س^2 - ١٠ = ٠ ، أو س^3 - ٤ = ٠

$\therefore$ س^2 = ١٠ | $\therefore$ س^3 = ٤

$\therefore$ س = $\pm\sqrt{١٠}$ | $\therefore$ س = $\sqrt[3]{٤}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\sqrt{١٠}$ ، $-\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt[3]{٤}\}$

> **لاحظ أنه**
> لأى عددين س ، ص :
> إذا كان : س ص = صفر
> فإن : إما س = صفر أو ص = صفر

حاول بنفسك ١

١ أكمل باستخدام أحد الرمزين ن أ، نَ :

١ ٣ $\in$	٢ $\sqrt{٣}$ $\in$	٣ ٩ $\in$ ....
٤ $\sqrt{٩}$ $\in$	٥ -٨ $\in$	٦ $\sqrt[3]{-٨}$ $\in$ ....
٧ ٥ $\in$	٨ $\sqrt[3]{٥}$ $\in$	٩ $\sqrt[3]{-٩}$ $\in$ ....

٢ أوجد مجموعة الحل فى نَ لكل مما يأتى :

١ ٢ س^2 - ٧ = ٣

٢ $\frac{١}{٢}$ س^2 - ٥ = ٣

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى

• إذا استخدمنا الآلة الحاسبة لإيجاد قيم بعض الأعداد غير النسبية فسنجد أن :

$\sqrt{٢} =$ ١,٤١٤٢... ، $\sqrt{٣} =$ ١,٧٣٢٠٥... ، $\sqrt{٥} =$ ٢,٢٣٦...

أى أن : العدد غير النسبى يمثل بعدد عشرى غير منته وغير دائر

ويمكن استنتاج قيمة تقريبية للعدد غير النسبى بدون استخدام الآلة الحاسبة.

فمثلًا : **يمكن إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبى $\sqrt{٥}$ كما يلى :**

∵ ٤ < ٥ < ٩ (لاحظ أننا اخترنا ٤ ، ٩ لأن كلًا منهما مربع كامل ، والعدد ٥ ينحصر بينهما)

ونأخذ الجذر التربيعى لجميع الأطراف.

∴ $\sqrt{٤} < \sqrt{٥} < \sqrt{٩}$

∴ ٢ < $\sqrt{٥}$ < ٣

أى أن : $\sqrt{٥}$ = ٢ + كسر أقل من الواحد الصحيح

ولإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{٥}$ نفحص قيم الأعداد التالية : $(٢,١)^٢$ ، $(٢,٢)^٢$ ، $(٢,٣)^٢$

فنجد أن : $(٢,١)^٢$ = ٤,٤١ ، $(٢,٢)^٢$ = ٤,٨٤ ، $(٢,٣)^٢$ = ٥,٢٩

، ∵ ٤,٨٤ < ٥ < ٥,٢٩

∴ $\sqrt{٤,٨٤} < \sqrt{٥} < \sqrt{٥,٢٩}$

∴ ٢,٢ < $\sqrt{٥}$ < ٢,٣

يمكن القول إن : ٢,٢ ، ٢,٣ تعتبر قيم تقريبية للعدد $\sqrt{٥}$

وهكذا يمكن إيجاد قيم أدق للعدد غير النسبى $\sqrt{٥}$

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة لتأكيد صحة القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{٥}$

ملاحظة

كل عدد غير نسبى تقع قيمته بين عددين نسبيين.

مثال ٣

اثبت أن : ١ $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ ٢ $\sqrt[3]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

الحل

١ $\because (\sqrt{٣})^{٢} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$ ، $(١,٧)^{٢} = ٢,٨٩$ ، $(١,٨)^{٢} = ٣,٢٤$

، $\because ٣,٢٤ > ٣ > ٢,٨٩$ $\therefore \sqrt{٣,٢٤} > \sqrt{٣} > \sqrt{٢,٨٩}$

$\therefore ١,٨ > \sqrt{٣} > ١,٧$ أى أن : $\sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

ويمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

$\because \sqrt{٣} \approx ١,٧٣$ ، $\because ١,٨ > ١,٧٣ > ١,٧$

$\therefore ١,٨ > \sqrt{٣} > ١,٧$ $\therefore \sqrt{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

٢ $\because (\sqrt[3]{١٢})^{٣} = \sqrt[3]{١٢} \times \sqrt[3]{١٢} \times \sqrt[3]{١٢} = ١٢$

، $(٢,٢)^{٣} = ١٠,٦٤٨$ ، $(٢,٣)^{٣} = ١٢,١٦٧$

، $\because ١٢,١٦٧ > ١٢ > ١٠,٦٤٨$ $\therefore \sqrt[3]{١٢,١٦٧} > \sqrt[3]{١٢} > \sqrt[3]{١٠,٦٤٨}$

$\therefore ٢,٣ > \sqrt[3]{١٢} > ٢,٢$ أى أن : $\sqrt[3]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

ويمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

$\because \sqrt[3]{١٢} \approx ٢,٢٨٩$ ، $\because ٢,٣ > ٢,٢٨٩ > ٢,٢$

$\therefore ٢,٣ > \sqrt[3]{١٢} > ٢,٢$ $\therefore \sqrt[3]{١٢}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

حاول بنفسك ٢

١ أوجد عددين صحيحين متتالين ينحصر بينهما $\sqrt{١٣}$

٢ أثبت أن $\sqrt{٧}$ ينحصر بين ٢,٦ ، ٢,٧

تمثيل العدد غير النسبى على خط الأعداد

• إذا رسمنا المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب بحيث يكون :

أ ب = ١ وحدة طول ، ب حـ = ٢ وحدة طول

فحسب نظرية فيثاغورس يكون :

$(أحـ)^2 = (أب)^2 + (بحـ)^2$

$= (١)^2 + (٢)^2 = ١ + ٤ = ٥$

∴ أحـ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

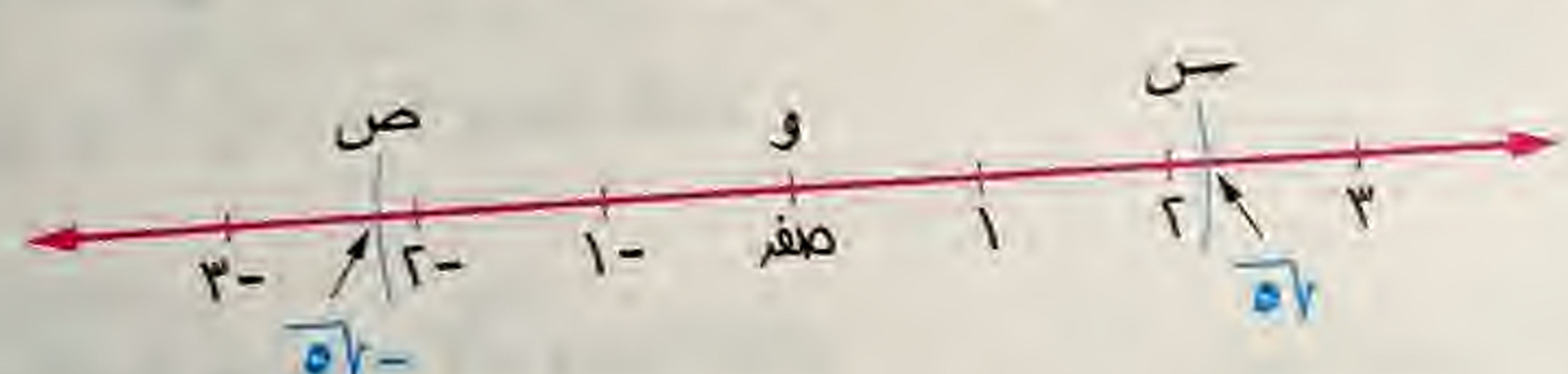


أى أن : طول $\overline{أحـ}$ يمثل العدد غير النسبى $\sqrt{٥}$

• فإذا رسمنا خط الأعداد وفتحنا الفرجار فتحة مساوية لطول $\overline{أحـ}$

ثم ركزنا فى نقطة و التى تمثل العدد صفر ورسمنا قوسًا يقطع خط الأعداد فى النقطة س على يمين النقطة و

فإن النقطة س تمثل العدد $\sqrt{٥}$ على خط الأعداد.



• وبنفس الفتحة إذا ركزنا بالفرجار فى النقطة و ورسمنا قوسًا يقطع خط الأعداد فى النقطة ص

فإن النقطة ص تمثل العدد $-\sqrt{٥}$ على خط الأعداد.

وبصفة عامة

كل عدد غير نسبى يمكن تمثيله بنقطة على خط الأعداد.

ملاحظة

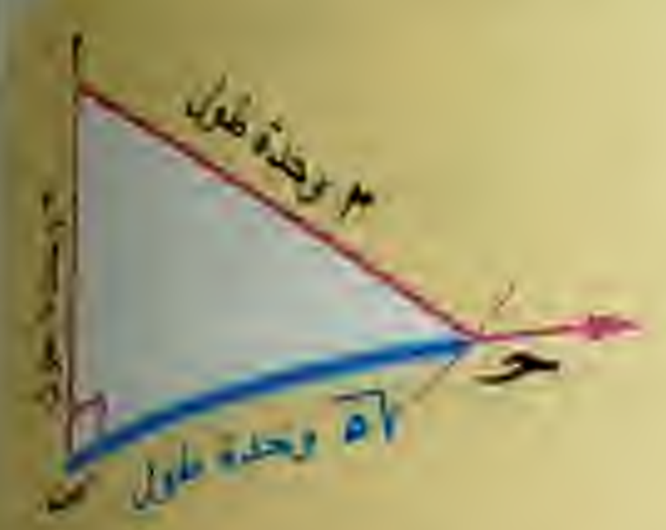
إذا رسمنا المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب بحيث يكون

أ ب = ٢ وحدة طول ، أ حـ = ٣ وحدة طول فإن :

$(\text{ب حـ})^{2} = (\text{أ حـ})^{2} - (\text{أ ب})^{2} = (٣)^{2} - (٢)^{2} = ٩ - ٤ = ٥$

أى أن : ب حـ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

ويمكن استخدام طول $\overline{\text{ب حـ}}$ فى تعيين النقطة التى تمثل $\sqrt{٥}$ أو $-\sqrt{٥}$



• مما سبق نستنتج أنه :

للحصول على قطعة مستقيمة طولها يساوى العدد غير النسبى $\sqrt{أ}$ فإننا نبحث عن عددين مجموع مربعيهما أو الفرق بين مربعيهما يساوى أ ونستخدمهما فى رسم المثلث القائم الزاوية

والأشكال التالية سوف تساعدنا فى إيجاد عددين الفرق بين مربعيهما يساوى مربع العدد غير النسبى.

• لرسم قطعة مستقيمة طولها = $\sqrt{٣}$ وحدة طول



فإن : طول أحد ضلعى القائمة = $\frac{٣ - ١}{٢}$ = ١ وحدة طول

وطول وتر المثلث = $\frac{٣ + ١}{٢}$ = ٢ وحدة طول

• لرسم قطعة مستقيمة طولها = $\sqrt{٥}$ وحدة طول



فإن : طول أحد ضلعى القائمة = $\frac{٥ - ١}{٢}$ = ٢ وحدة طول

وطول وتر المثلث = $\frac{٥ + ١}{٢}$ = ٣ وحدة طول

• لرسم قطعة مستقيمة طولها = $\sqrt{٦}$ وحدة طول



فإن : طول أحد ضلعى القائمة = $\frac{٦ - ١}{٢}$ = $٢\frac{١}{٢}$ وحدة طول

وطول وتر المثلث = $\frac{٦ + ١}{٢}$ = $٣\frac{١}{٢}$ وحدة طول

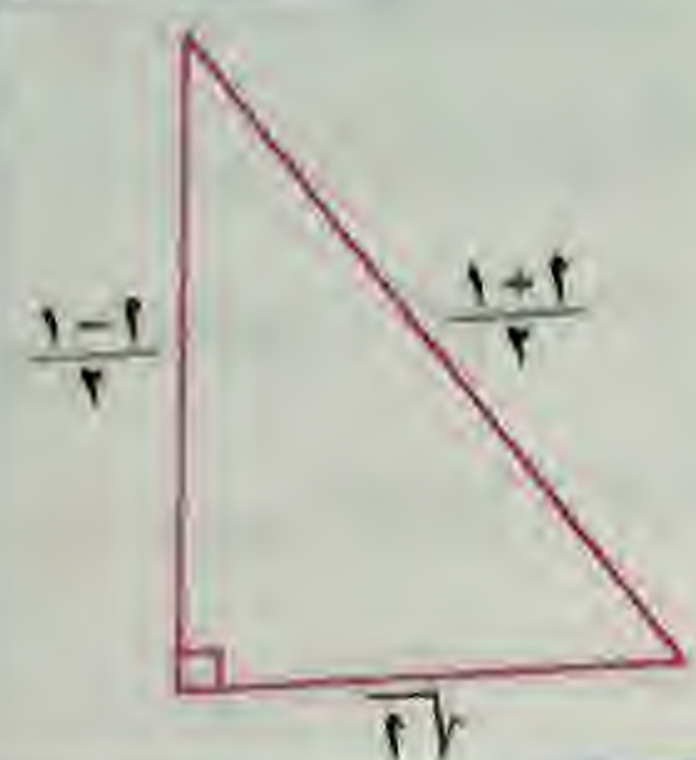
وبصفة عامة :

لرسم قطعة مستقيمة طولها = $\sqrt{أ}$ وحدة طول حيث أ > ١

نرسم مثلثًا قائم الزاوية فيه :

طول أحد ضلعى القائمة = $\frac{أ - ١}{٢}$ وحدة طول

، طول وتر المثلث = $\frac{أ + ١}{٢}$ وحدة طول



مثال ٤

ارسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{٧}$ وحدة طول واستخدمها فى تعيين النقط التى تمثل الأعداد الآتية :

١ $\sqrt{٧}$ | ٢ $-\sqrt{٧}$ | ٣ $١ + \sqrt{٧}$

٤ $٢ - \sqrt{٧}$ | ٥ $٢\sqrt{٧}$

الحل

• نرسم Δ أ ب ح قائم الزاوية فى ب بحيث يكون :

أ ب = $\frac{٧ - ١}{٢}$ = ٣ وحدة طول ، أ ح = $\frac{٧ + ١}{٢}$ = ٤ وحدة طول

فيكون : $(ب ح)^٢ = (أ ح)^٢ - (أ ب)^٢ = ١٦ - ٩ = ٧$

∴ ب ح = $\sqrt{٧}$ وحدة طول



١ باستخدام الفرجار وبفتحة مساوية طول $\overline{ب ح}$

نركز فى و ونرسم قوسًا يقطع خط الأعداد

على يمين النقطة و فى نقطة س

فتكون : النقطة س هى التى تمثل العدد $\sqrt{٧}$



٢ بنفس الفتحة نركز في و ونرسم قوسًا يقطع خط الأعداد على يسار و في نقطة ص



فتكون: النقطة ص هي النقطة التي تمثل العدد $-\sqrt{٧}$

٣ بنفس الفتحة نركز في النقطة التي تمثل العدد ١ على خط الأعداد ونرسم قوسًا على يمين هذه النقطة ليقطع خط الأعداد في النقطة ع



فتكون: النقطة ع هي النقطة التي تمثل العدد $١ + \sqrt{٧}$

٤ بنفس الفتحة نركز في النقطة التي تمثل العدد ٢ على خط الأعداد ونرسم قوسًا على يسار هذه النقطة ليقطع خط الأعداد في النقطة ن



فتكون: النقطة ن هي النقطة التي تمثل العدد $٢ - \sqrt{٧}$

٥ بنفس الفتحة نركز في نقطة و على خط الأعداد ونرسم قوسًا

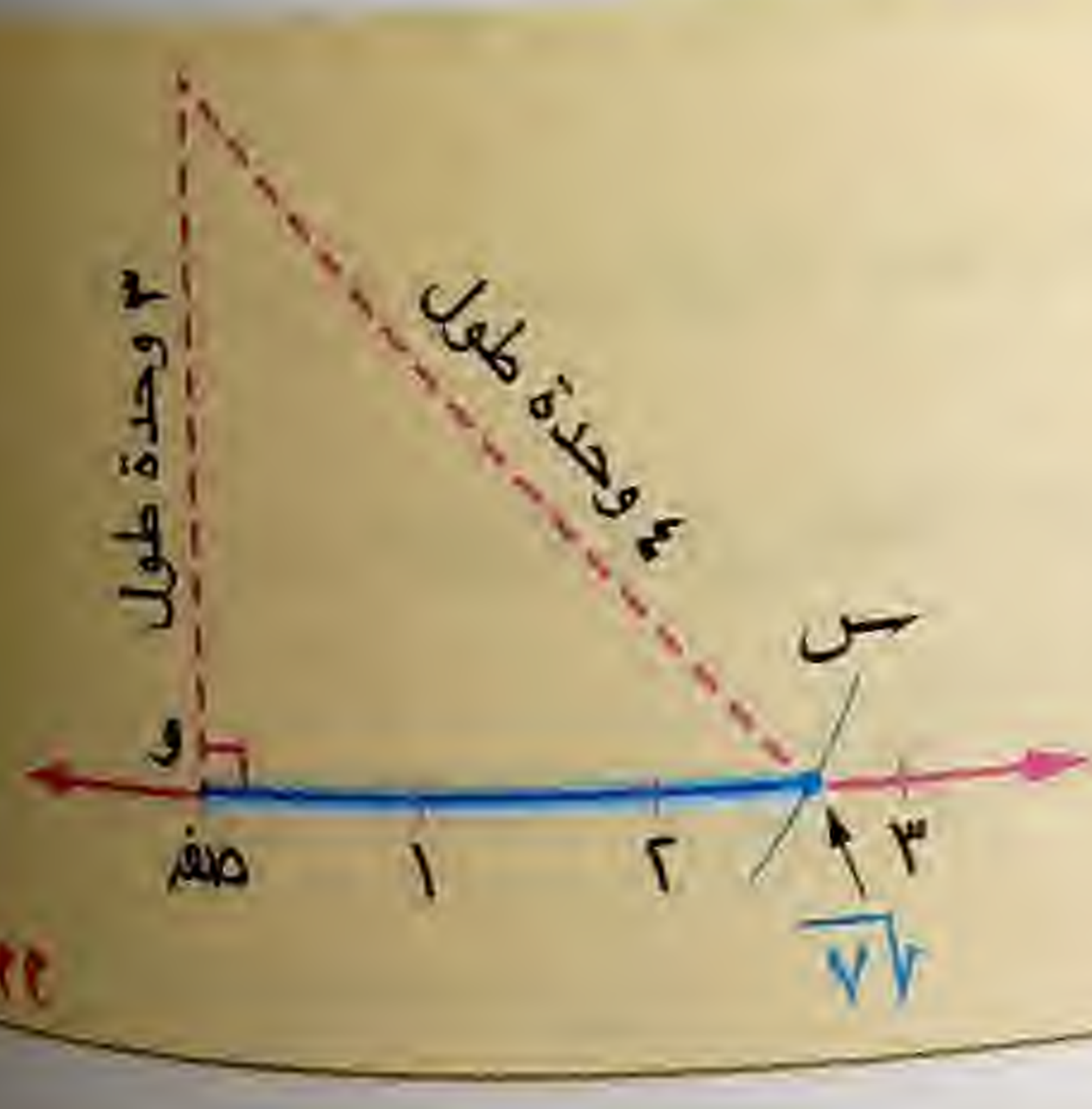


على يمين النقطة و ليقطع خط الأعداد في نقطة ء ثم بنفس الفتحة نركز في ء ونرسم قوسًا آخر على يمين النقطة ء ليقطع خط الأعداد في نقطة هـ

فتكون: النقطة هـ هي النقطة التي تمثل العدد $٢\sqrt{٧}$

ملاحظة

في المثال السابق يمكن تعيين النقطة التي تمثل العدد $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد برسم المثلث القائم مباشرة على خط الأعداد كما بالشكل المقابل.



مثال ٥

أوجد طول قطر مربع مساحته ٥ سم٢



الحـــل

بفرض أن : طول ضلع المربع = ل سم

∴ مساحة المربع = ل × ل = ل٢ سم٢

∴ ل٢ = ٥

∴ ل = $\sqrt{٥}$ سم

(لاحظ أن طول ضلع المربع يجب أن يكون موجبًا ولذلك ل تساوى $\sqrt{٥}$ ولا تساوى − $\sqrt{٥}$)

، ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب (من خواص المربع أ ب حـ ء)

∴ (أ حـ)٢ = (أ ب)٢ + (ب حـ)٢ = $(\sqrt{٥})^٢ + (\sqrt{٥})^٢$ = ٥ + ٥ = ١٠

∴ أ حـ = $\sqrt{١٠}$ سم

∴ طول قطر المربع = $\sqrt{١٠}$ سم

حاول بنفسك ٣

عيّن النقطة التى تمثل العدد $\sqrt{١١}$ على خط الأعداد.

تمارين 2

على مجموعة الأعداد غير النسبية (ت)

📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ فى كل مما يأتى بيّن نوع كل عدد من حيث كونه نسبيًا أم غير نسبى :

١ -٥	٢ $٢\frac{٢}{٣}$	٣ $٢,٠٦$	٤ $٢,٣ \times ١٠$
٥ $-\sqrt{٣٦}$	٦ $\sqrt[٣]{٣٦}$	٧ $\sqrt[٣]{٧}$	٨ صفر
٩ $\|-٥\|$	١٠ $\sqrt[٣]{-\frac{٦٤}{٨١}}$	١١ $\sqrt{\frac{٢٥}{١٦}}$	١٢ $\sqrt{\frac{١}{٢}}$
١٣ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$	١٤ $\sqrt[٣]{٠,٣٤٣}$	١٥ $\frac{\pi}{٢}$	١٦ $(-٥)^{صفر}$
١٧ $\frac{صفر}{٣}$	١٨ $\frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{٤}}$	١٩ $\sqrt{٩} + \sqrt{١٦}$	٢٠ $\sqrt[٣]{٤} - \sqrt{١١}$

٢ أوجد قيمة تقريبية لكل من الأعداد الآتية :

١ $\sqrt{١١}$ لأقرب جزء من مائة.

٢ $\sqrt[٣]{٧}$ لأقرب جزء من عشرة.

٣ $\sqrt[٣]{-٩}$ لأقرب جزء من عشرة.

٣ أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما كل مما يأتى :

١ $\sqrt{٥}$ ٢ $\sqrt{١٢}$ ٣ $\sqrt[٣]{١٠}$ ٤ $\sqrt[٣]{-٢٠}$

٤ إذا كان س عددًا صحيحًا فأوجد قيمة س فى كل من الحالات الآتية :

١ $س < \sqrt{٢} < س + ١$

٢ 📖 $س < \sqrt{٨٠} < س + ١$

٣ 📖 $س < \sqrt[٣]{٥} < س + ١$

٤ $س < \sqrt[٣]{٥٠} < س + ١$

٥ $س < \sqrt[٣]{-١٠٠} < س + ١$

٦ $س < \|-\sqrt[٣]{٣٥}\| < س + ١$

٥ أوجد قيمة تقريبية لكل من الأعداد الآتية وتحقق من صحة إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة :

١ $\sqrt{٢٠}$ ٢ $\sqrt[٣]{١٧}$ ٣ $\sqrt[٣]{٥} + ١$ ٤ $\sqrt[٣]{٩} - ١$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد غير النسبى فى الأعداد التالية هو ....

(أ) $\sqrt{\frac{١}{٤}}$ (ب) $\sqrt[٣]{٨}$ (جـ) $\sqrt{\frac{٤}{٩}}$ (د) $\sqrt{٢}$

٢ إذا كان : س = $\sqrt{٢}$ ، ص = ٢ فأى مما يلى لا يمثل عددًا نسبيًا ؟

(أ) $س^٢ + ص$ (ب) $س + ص^٢$ (جـ) $\sqrt{س^٢ ص}$ (د) $\sqrt{٢}$ س ص

٣ العدد غير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) $\sqrt{٧}$ (جـ) ٢٫٥ (د) $\sqrt{٣}$

٤ العدد غير النسبى المحصور بين −٢ ، −١ هو ....

(أ) −٣ (ب) $-١\frac{١}{٢}$ (جـ) $-\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٣}$

٥ $\sqrt{١٠} \approx$ ....

(أ) ٢٫٩٩ (ب) ٣٫٧١ (جـ) ٣ (د) −٣٫٢

٦ أقرب عدد صحيح للعدد $\sqrt[٣]{٢٥}$ هو ....

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١٢٫٥

٧ إذا كانت : ن ∈ $ص_+$ ، ن < $\sqrt{٢٦}$ < ن + ١ فإن : ن = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ٢٤

٨ طول ضلع مربع مساحته ٦ $سم^٢$ هو عدد ....

(أ) طبيعى. (ب) صحيح. (جـ) نسبى. (د) غير نسبى.

٩ المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{٣}$ سم تكون مساحته .... $سم^٢$

(أ) ٤ $\sqrt{٣}$ (ب) ٩ (جـ) ٣ (د) ٦

٥ المربع الذى مساحته ١٠ سم^{٢} يكون طول ضلعه .... سم

(أ) ٥ (ب) -٥ (ج) $\sqrt{١٠}$ (د) $-\sqrt{١٠}$

٦ مجموعة حل المعادلة $(س - \sqrt{٥})(س + \sqrt{٣}) =$ صفر فى ح هى ....

(أ) $\{\sqrt{٥}\}$ (ب) $\{-\sqrt{٣}\}$

(ج) $\{-\sqrt{٥} ، \sqrt{٣}\}$ (د) $\{\sqrt{٥} ، -\sqrt{٣}\}$

٧ أوجد قيمة س فى كل مما يأتى وبيّن ما إذا كانت س ∈ ن أم س ∈ ن َ :

١ $٥ س^{٢} = ١٠$

٢ $٤ س^{٢} = ٩$

٣ $س^{٣} = ١٢٥$

٤ $٣ س^{٣} = ٢٧$

٥ $٠,١ س^{٢} = ١٠$

٦ $٠,٠٠١ س^{٣} = -٨$

٧ $(س - ١)^{٢} = ٤$

٨ $(س - ٥)^{٣} = ١$

٨ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ $س^{٢} = ١٣$

٢ $س^{٣} = ١٦$

٣ $\frac{٢}{٥} س^{٢} = \frac{٢٥}{٢}$

٤ $\frac{٥}{٤} س^{٣} = -٢$

٥ $١٢٥ س^{٣} - ٧ = ٢٠$

٦ $\frac{١}{٤} س^{٢} + ٢ = ٦٦$

٧ $(س^{٢} + ٥)(س^{٢} - ٣) =$ صفر

٨ $(س + \sqrt{٧})(س^{٢} - ٦) =$ صفر

٩ أثبت أن :

١ $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

٢ $\sqrt{١١}$ ينحصر بين ٣,٣١ ، ٣,٣٢

٣ $\sqrt[٣]{٢}$ ينحصر بين ١,٢ ، ١,٣

٤ $\sqrt[٣]{١٥}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

٥ $\sqrt[٣]{-١٧}$ ينحصر بين -٢,٦ ، -٢,٥

٦ $\sqrt{٣} + ١$ ينحصر بين ٢,٧ ، ٢,٨

١٠ عين النقطة التى تمثل كلاً من الأعداد الآتية على خط الأعداد :

١ $\sqrt{٣}$	٢ $-\sqrt{١١}$	٣ $\sqrt{١٠}$
٤ $\sqrt{٥}+١$	٥ $٢-\sqrt{٧}$	

١١ ارسم خط الأعداد وحدد عليه النقطة أ التى تمثل العدد $\sqrt{٢}$ والنقطة ب التى تمثل العدد $١+\sqrt{٢}$ والنقطة حـ التى تمثل العدد $١-\sqrt{٢}$

١٢ ارسم المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ١ سم ، ب حـ = ٣ سم

واستخدم الشكل فى تعيين النقط التى تمثل الأعداد الآتية على خط الأعداد :

١ $\sqrt{١٠}$	٢ $-\sqrt{١٠}$
٣ $٢+\sqrt{١٠}$	٤ $٣-\sqrt{١٠}$

١٣ احسب طول ضلع وطول قطر المربع الذى مساحته ١٠ سم^{٢} « $\sqrt{١٠}$ سم ، $\sqrt{٢٠}$ سم»

تطبيق حياتى

١٤ بسبب الرياح كُسِر الجزء العلوى من شجرة طولها ٣ أمتار فصنع مع سطح الأرض زاوية ما ، فإذا كان طول الجزء الثابت فوق الأرض من الشجرة ١ متر فأوجد المسافة بين قاعدة الشجرة ونقطة تلاقى قمتها مع الأرض. « $\sqrt{٣}$ متر»



للمتفوقين

١٥ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt{٣}+\sqrt{٢}$ ينحصر بين ٣ ، ٤



الدرس **3**

مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)
- علاقة الترتيب فى (ح)

مجموعة الأعداد الحقيقية

هى المجموعة الناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز ح

أى أن : ح = ن ∪ نَ (كما بالشكل المقابل)

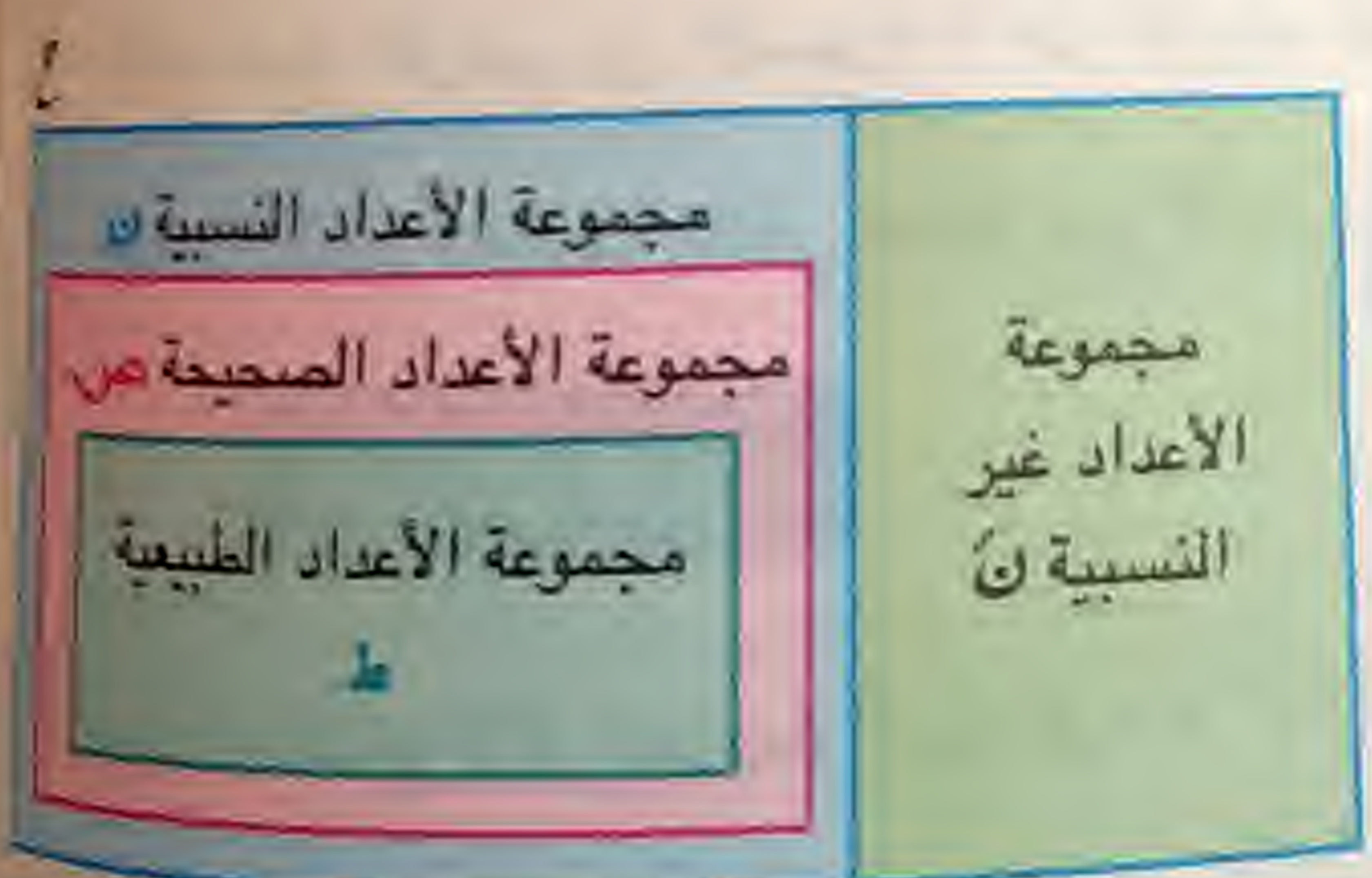
، مع ملاحظة أن : ن ∩ نَ = ∅



- وشكل ڤن المقابل يوضح أن :

ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح

، نَ ⊂ ح



• والمخطط التالى يوضح العلاقة بين مجموعات الأعداد التى سبق دراستها حتى الآن :



علاقة الترتيب فى (ح)

• كل عدد حقيقى تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد.

• مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة مرتبة.

• إذا كانت النقطة التى تمثل العدد س تقع على يسار النقطة التى تمثل العدد ص

كما بالشكل المقابل فإن : س < ص أو ص > س



• كل عدد حقيقى تقع النقطة التى تمثله على يمين نقطة الأصل (و) يكون أكبر من الصفر وجميع هذه الأعداد تكون مجموعة من الأعداد تُسمى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ويرمز لها بالرمز ح+

ح+ = {س : س ∈ ح ، س > صفر}

• كل عدد حقيقى تقع النقطة التى تمثله على يسار نقطة الأصل (و) يكون أصغر من الصفر وجميع هذه الأعداد تكون مجموعة من الأعداد تُسمى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ويرمز لها بالرمز $ح_-$

$$ح_- = \{س : س \in ح ، س < صفر\}$$



ملاحظات

• $ح_+ \cap ح_- = \emptyset$

• $ح = ح_+ \cup \{٠\} \cup ح_-$

• العدد «صفر» ليس موجبًا وليس سالبًا.

• $ح_+ \cup \{٠\} = \{س : س \in ح ، س \geq ٠\}$ وتسمى مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

• $ح_- \cup \{٠\} = \{س : س \in ح ، س \leq ٠\}$ وتسمى مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة.

• يرمز للأعداد الحقيقية بدون الصفر بالرمز $ح^*$

أى أن: $ح^* = ح - \{٠\} = ح_+ \cup ح_-$

مثال ١

رتب تصاعديًا الأعداد الآتية: $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، -٨ ، ٧ ، $-\sqrt{٣٢}$

الحل

• نرتب أولاً الأعداد الموجبة وهى: $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، ٧

$\because ٧ = \sqrt{٤٩}$ ، $\because ٤٩ < ٦٨ < ٧٥$ $\therefore \sqrt{٤٩} < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

أى أن: $٧ < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

• ثم نرتب الأعداد السالبة وهى : $-\sqrt{٤٥}$ ، -٨ ، $-\sqrt{٣٢}$

$\because ٨ = \sqrt{٦٤}$ ، $\because ٦٤ > ٤٥ > ٣٢$ $\therefore \sqrt{٦٤} > \sqrt{٤٥} > \sqrt{٣٢}$

$\therefore -\sqrt{٦٤} < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$ أى أن : $-٨ < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$

$\therefore$ الترتيب التصاعدى هو : -٨ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{٣٢}$ ، ٧ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $\sqrt{٧٥}$

ملاحظة

يمكن الحل باستخدام الآلة الحاسبة عن طريق إيجاد قيم تقريبية للجذور.

مثال ٢

اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية محصورة بين العددين ١١ ، ١٢

الحل

$\because (١١)^٢ = ١٢١$ ، $(١٢)^٢ = ١٤٤$

$\therefore$ ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٣٠ ثلاثة أعداد صحيحة تنحصر بين ١٢١ ، ١٤٤

$\therefore ١٢١ < ١٢٥ < ١٢٦ < ١٣٠ < ١٤٤$

$\therefore \sqrt{١٢١} < \sqrt{١٢٥} < \sqrt{١٢٦} < \sqrt{١٣٠} < \sqrt{١٤٤}$

$\therefore$ الأعداد غير النسبية المطلوبة هى : $\sqrt{١٢٥}$ ، $\sqrt{١٢٦}$ ، $\sqrt{١٣٠}$

لاحظ أنه

توجد أعداد غير نسبية أخرى تنحصر بين ١١ ، ١٢

مثال ٣

أوجد مجموعة الحل فى ح لكل من المعادلات الآتية :

١ $٢ س^٢ + ١٢٥ = ٢٢١$

٢ $\frac{١}{٦} س^٢ - ٨ = ٢٨$

٣ $٢ س^٢ + ٦ = ٤$

الحل

١ ∵ ٣ س^{٢} + ١٢٥ = ٢٢١ ∴ ٣ س^{٢} = ٢٢١ − ١٢٥

∴ س^{٢} = $\frac{٩٦}{٣}$ ∴ س^{٢} = ٣٢

∴ مجموعة الحل = {$\sqrt{٣٢}$ ، $-\sqrt{٣٢}$}

٢ ∵ $\frac{١}{٦}$ س^{٣} − ٨ = ٢٨ ∴ $\frac{١}{٦}$ س^{٣} = ٣٦

∴ س^{٣} = ٢١٦ ∴ س = $\sqrt[٣]{٢١٦}$

∴ مجموعة الحل = {٦}

٣ ∵ ٢ س^{٢} + ٦ = ٤ ∴ ٢ س^{٢} = ٤ − ٦

∴ س^{٢} = $\frac{-٢}{٢}$ ∴ س^{٢} = −١

، ∵ $\sqrt{-١}$ ∉ ح ، $-\sqrt{-١}$ ∉ ح

حاول بنفسك

أكمل كلًا مما يأتي باستخدام إحدى العلامتين > أ، < :

١ $\sqrt{٢}$ ١	**٢** $-\sqrt{٣}$ .... −١	**٣** $\sqrt[٣]{٩}$ ٣
٤ $-\sqrt[٣]{٧}$ .... −٢	**٥** $\sqrt{٧}$ ٢,٦	**٦** $-\sqrt[٣]{١٦}$ .... −٢,٥٢

تمارين 3

على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) - علاقة الترتيب فى ح



اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الجدول التالى بوضع علامة (✓) فى المكان المناسب كما فى الحالة الأولى :

العدد	عدد طبيعى	عدد صحيح	عدد نسبى	عدد غير نسبى	عدد حقيقى
−٥	✗	✓	✓	✗	✓
$\sqrt{٢}$					
$١\frac{١}{٢}$					
$\sqrt{٩}$					
|−٢|					
$-\sqrt{٤}$					
$\frac{٥}{٢}$					
٠,٣					
$\sqrt{-١}$					

٢ أكمل ما يأتى :

١) ن ∩ نَ = ...

٢) ن ∪ نَ = ...

٣) ح+ ∩ ح− = ...

٤) ح+ ∪ ح− = ...

٥) ح − نَ = ...

٦) ح − ن = ...

٧) ح+ ∩ {−١ ، ٠ ، ١} = ...

٣ إذا كانت س ∈ ح فاذكر ما إذا كانت س موجبة أو سالبة أو خلاف ذلك فى كل من الحالات الآتية :

١) س > ٠

٢) س < ٠

٣) س > |−٤|

٤) |−٥| < س < ٧

٥) −٢ < س < ٠

٦) |−١| < س < |−٧|

٤ ضع العلامة المناسبة (< أو > أو =) :

١ $\sqrt{٥}$ ٢

٢ $\sqrt{٧}$ ٢,٦

٣ $\sqrt[3]{٢٤}$ ٣

٤ $\sqrt[3]{-٢٤}$ .... -٢

٥ $٢ - \sqrt{٥}$ .... $\sqrt[3]{-١}$

٦ $\sqrt[3]{٨}$ .... $\sqrt{٤}$

٧ $١ + \sqrt{٣}$ .... $\sqrt{٥}$

٨ $\sqrt{٣} - ١$ ٠,٢

٩ $\sqrt{٢} - ١$ .... $١ - \sqrt{٢}$

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ح = ...

(أ) $ن \cup نَ$ (ب) $ص_{+} \cup ص_{-}$ (جـ) $ح_{+} \cup ح_{-}$ (د) $ط \cup ح_{-}$

٢ $\{س : س \in ح ، س < ٠\}$ = ...

(أ) $ح_{+}$ (ب) $ح_{-}$ (جـ) $ح^{*}$ (د) ح

٣ إذا كانت س عددًا حقيقيًا سالبًا فأى من الأعداد الآتية يمثل عددًا موجبًا ؟

(أ) $س^{٢}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) ٢ س (د) $\frac{س}{٢}$

٤ إذا كان : $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{أ}{\sqrt{٥}}$ عددين حقيقيين بين صفر ، ١ فإن : أ = ...

(أ) -٢ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) ٢

٥ إذا كان : $س \in ح_{+}$ ، $ص \in ح_{+}$ وكان $س^{٢} > ص^{٢}$ فإن : ....

(أ) $س > ص$ (ب) $س < ص$ (جـ) $س = ص$ (د) $س \leq ص$

٦ $\sqrt{(٢ - \pi)^{٢}}$ .... $(\pi - ٢)$ (حيث π النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها)

(أ) = (ب) > (جـ) < (د) ≥

٧ مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} + ١ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) $\{-١\}$ (ب) $\{١ ، -١\}$ (جـ) $\{١\}$ (د) $\varnothing$

٦ رتب الأعداد الآتية ترتيبًا تصاعديًا :

١ $\sqrt{8}$ ، $-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{15}$ ، $\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{7}$ ، $-\sqrt{11}$

٢ $\sqrt[3]{27}$ ، $-\sqrt{45}$ ، $\sqrt{20}$ ، ٠,٠٦ ، $\sqrt[3]{-1}$

٧ رتب الأعداد الآتية ترتيبًا تنازليًا :

١ $\sqrt{62}$ ، ٨ ، $-\sqrt{50}$ ، $\sqrt{70}$

٢ $\sqrt{6}$ ، ٩ ، $-\sqrt{10}$ ، $-\sqrt{7}$ ، $-\sqrt{50}$ ، $\sqrt{101}$

٨ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية موجبة أصغر من ٢

٩ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية سالبة أكبر من $-\sqrt{6}$

١٠ اكتب أربعة أعداد غير نسبية محصورة بين ١٥ ، ١٧

١١ أثبت أن :

$\sqrt{3}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨ ومثل الأعداد $\sqrt{3}$ ، ١,٧ ، ١,٨ على خط الأعداد.

١٢ حل المعادلات الآتية لأقرب جزء من مائة علمًا بأن س ∈ ح :

١ $س^2 - 6 = 0$

٢ $\frac{3}{4} س^2 = 24$

٣ $\frac{1}{2} س^2 - 5 = 0$

٤ $5 س^2 + 3 = 2$

٥ $\frac{3}{4} س^2 + 2 = -11$

٦ $\frac{2}{س^3} + 5 = 21$ ، س ≠ ٠

٧ $(س^2 - 9)(س^3 - 5) = 0$

٨ $(2 س^3 - 5)(س^2 + 1) = 0$

تطبيقات هندسية

١٣ أوجد طول ضلع مربع مساحته ٧ سم^2 ، هل طول ضلعه وطول قطره عددان نسبيان ؟

«$\sqrt{7}$ سم ، $\sqrt{14}$ سم»

١٤ أوجد طول حرف مكعب حجمه ١,٧٢٨ سم^٣ ، هل طول الحرف عدد نسبى؟ (١,٢ سم)

١٥ مكعب مساحته الكلية ١٣,٥ سم^٢ ، أوجد طول حرفه ، هل طول الحرف عدد نسبى؟ (١,٥ سم)

١٦ مربع طول ضلعه ٦ سم ، أوجد طول قطره. ($\sqrt{٧٢}$ سم)

١٧ مربع مساحته ٣٢ سم^٢ ، أوجد طول ضلعه وكذلك طول قطره. ($\sqrt{٣٢}$ سم ، ٨ سم)

١٨ مثلث قائم الزاوية متساوى الساقين طول أحد ضلعى القائمة ٥ سم ، أوجد طول وتره. ($\sqrt{٥٠}$ سم)

١٩ مستطيل بعداه ٥ ، ٧ من السنتيمترات ، أوجد طول قطره ، وإذا كانت مساحته تساوى مساحة مربع فأوجد طول ضلع المربع وكذا طول قطره. ($\sqrt{٧٤}$ سم ، $\sqrt{٣٥}$ سم ، $\sqrt{٧٠}$ سم)

للمتفوقين

٢٠ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\sqrt[3]{٣} < \sqrt{٢}$

٢١ عددان حقيقيان مجموع مربعيهما ٧ وأكبرهما ٢ فأوجد العدد الآخر. ($\pm\sqrt{٣}$)



الدرس
4

الفـــترات

تمهيد

- من خلال دراستك السابقة تعرفت على الطرق المختلفة للتعبير عن المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية ، والمجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة وكيفية تمثيلها على خط الأعداد.

فمثلًا :

إذا كانت : س = مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوى −٣ والأصغر من ٢

* فإنه يمكن التعبير عن المجموعة س بطريقة الصفة المميزة كالتالى : ← $س = \{ أ : أ \in ص ، -٣ \le أ < ٢ \}$

* كما يمكن التعبير عنها بطريقة السرد كالتالى : ← $س = \{ -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ \}$

* وتمثل المجموعة س على خط الأعداد كما بالشكل : ←



- **والسؤال هل من الممكن استخدام نفس الطرق السابقة للتعبير عن المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وتمثيلها على خط الأعداد ؟!!**

بفرض أن : ك = مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوى −٣ والأصغر من ٢

• فإنه يمكن التعبير عن المجموعة ك بطريقة الصفة المميزة كالتالى : ك = {أ : أ ∈ ح ، -٣ ≤ أ < ٢}

• ولكنه من المستحيل التعبير عن هذه المجموعة عن طريق سرد جميع عناصرها لأننا نعلم أنه بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية.

• ولنفس السبب لا يمكن تمثيل المجموعة ك على خط الأعداد بنقاط منفصلة كما بالشكل السابق ذكره.

• ولذلك نستخدم طريقة أخرى للتعبير عن المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية وهى «الفترات».

وفيما يلى أنواع الفترات :

أولًا الفترات المحدودة

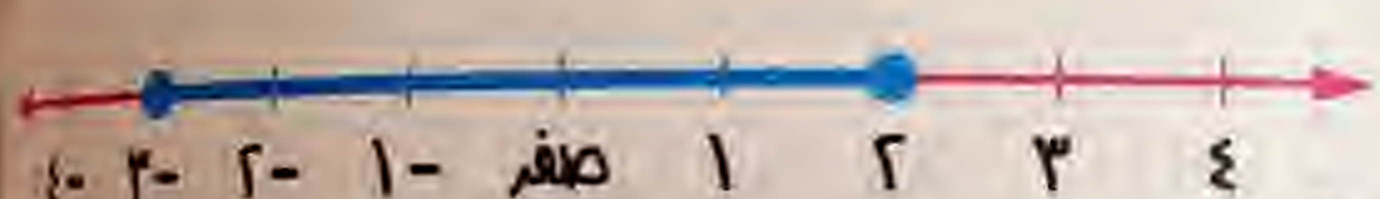
(أ) الفترة المغلقة

• المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ ≤ س ≤ ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية التى تتكون من العددين -٣ ، ٢ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينهما ونرمز لها بالرمز [-٣ ، ٢]

وتُسمى «فترة مغلقة».

> **لاحظ أنه**
> عند كتابة الفترة يجب كتابة العدد الأصغر أولًا.

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : -٣ ∈ [-٣ ، ٢] ، ٢ ∈ [-٣ ، ٢]

ونعبر عن ذلك برسم دائرتين مظللتين عند النقطتين اللتين تمثلان العددين -٣ ، ٢

(ب) الفترة المفتوحة

• المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ < س < ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية المحصورة بين العددين -٣ ، ٢ ولا يدخل ضمنها العددان -٣ ، ٢

ونرمز لها بالرمز]-٣ ، ٢[وتُسمى «فترة مفتوحة».

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : -٣ ∉]-٣ ، ٢[، ٢ ∉]-٣ ، ٢[

ونعبر عن ذلك برسم دائرتين غير مظللتين عند النقطتين اللتين تمثلان العددين -٣ ، ٢

ج الفترة نصف المفتوحة «نصف المغلقة»

١ المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ ≤ س < ٢} تعبر عن العدد -٣ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينه وبين العدد ٢ دون أن يكون العدد ٢ ضمنها

ونرمز لها بالرمز **[-٣ ، ٢ [** وتُسمى «فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة».

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : -٣ ∈ [-٣ ، ٢[، ٢ ∉ [-٣ ، ٢[

٢ المجموعة {س : س ∈ ح ، -٣ < س ≤ ٢} تعبر عن العدد ٢ وجميع الأعداد الحقيقية المحصورة بينه وبين العدد -٣ دون أن يكون العدد -٣ ضمنها

ونرمز لها بالرمز **] -٣ ، ٢]** وتُسمى «فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة».

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



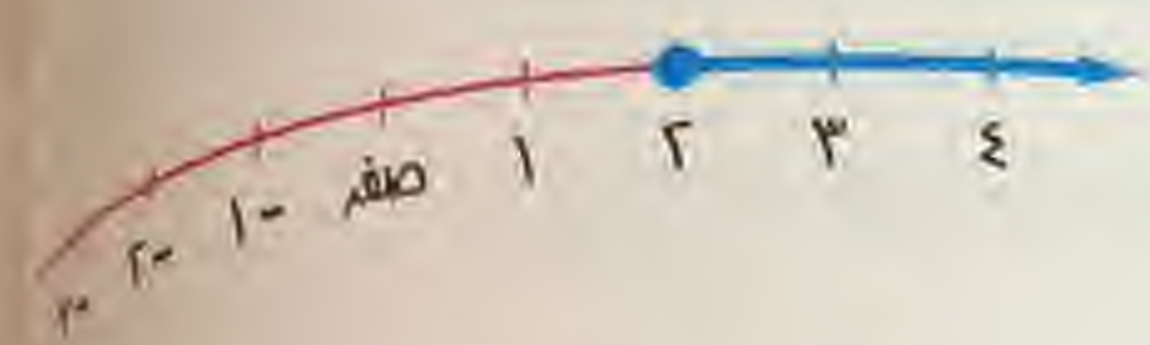
• لاحظ أن : -٣ ∉]-٣ ، ٢] ، ٢ ∈]-٣ ، ٢]

ثانيًا الفترات غير المحدودة

[١] المجموعة {س : س ∈ ح ، س ≥ ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية التي تبدأ من العدد ٢ وجميع الأعداد الحقيقية الأكبر من ٢ بلا نهاية ،

ونرمز لها بالرمز [٢ ، ∞[حيث الرمز ∞ يُقرأ موجب ما لا نهاية وهو لا يعبر عن عدد حقيقي.

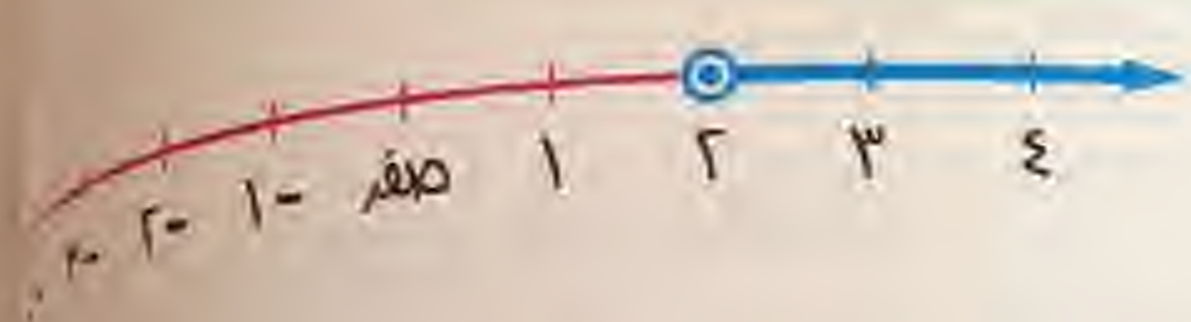
• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : ٢ ∈ [٢ ، ∞[

[٢] المجموعة {س : س ∈ ح ، س > ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من العدد ٢ بلا نهاية ، ونرمز لها بالرمز]٢ ، ∞[

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : ٢ ∉]٢ ، ∞[

[٣] المجموعة {س : س ∈ ح ، س ≤ ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية التي تنتهي عند العدد ٢ وجميع الأعداد الحقيقية الأصغر من ٢ بلا نهاية ،

ونرمز لها بالرمز]-∞ ، ٢] حيث الرمز -∞ يقرأ سالب ما لا نهاية وهو لا يعبر عن عدد حقيقي.

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : ٢ ∈]-∞ ، ٢]

[٤] المجموعة {س : س ∈ ح ، س < ٢} تعبر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من العدد ٢ بلا نهاية ونرمز لها بالرمز]-∞ ، ٢[

• ونمثلها على خط الأعداد كما بالشكل :



• لاحظ أن : ٢ ∉]-∞ ، ٢[

• ويمكن التعبير عما سبق رمزيًا في الجدول التالي بفرض أن أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، أ < ب :

نوع الفترة	الفترة	التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد	لاحظ أن

• ويمكن التعبير عما سبق رمزيًا في الجدول التالي بفرض أن أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، أ < ب :

نوع الفترة		الفترة	التعبير عنها بطريقة الصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد	لاحظ أن
الفترة المحدودة	المغلقة	[أ ، ب]	{س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب}		• أ ∈ [أ ، ب] • ب ∈ [أ ، ب]
	المفتوحة	]أ ، ب[	{س : س ∈ ح ، أ < س < ب}		• أ ∉]أ ، ب[• ب ∉]أ ، ب[
	نصف المفتوحة	[أ ، ب[	{س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب}		• أ ∈ [أ ، ب[• ب ∉ [أ ، ب[
		]أ ، ب]	{س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب}		• أ ∉]أ ، ب] • ب ∈]أ ، ب]
الفترة غير المحدودة		[أ ، ∞[	{س : س ∈ ح ، س ≥ أ}		أ ∈ [أ ، ∞[
		]أ ، ∞[	{س : س ∈ ح ، س > أ}		أ ∉]أ ، ∞[
		]-∞ ، أ]	{س : س ∈ ح ، س ≤ أ}		أ ∈]-∞ ، أ]
		]-∞ ، أ[	{س : س ∈ ح ، س < أ}		أ ∉]-∞ ، أ[

ملاحظات

١ ع =]-∞ ، ∞[

٢ ع+ =]٠ ، ∞[

٣ ع- =]-∞ ، ٠[

٤ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = ع+ ∪ {٠} = [٠ ، ∞[

٥ مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = ع- ∪ {٠} =]-∞ ، ٠]

مثال ١

اكتب كلًا من المجموعات الآتية على صورة فترة ثم مثلها على خط الأعداد :

١ {س : س ∈ ع ، -٣ < س ≤ ٠}

٢ {أ : أ ∈ ع ، ١ ≥ أ ≥ -٢}

٣ {س : س ∈ ع ، س > ٠}

٤ {ص : ص ∈ ع ، -١ ≥ ص}

الحل

١]-٣ ، ٠]



٢ [-٢ ، ١]



٣]٠ ، ∞[



٤]-∞ ، -١]



حاول بنفسك ١

١ اكتب كلًا مما يأتي على صورة فترة ومثلها على خط الأعداد :

١ {س : س ∈ ع ، -٤ < س ≤ ٢}

٢ {ص : ص ∈ ع ، ص ≤ -٥}

٢ مثل كلًا مما يأتي على خط الأعداد وعبر عنها باستخدام الصفة المميزة :

١]-٣ ، ٠[

٢]-∞ ، ٢]

العمليات على الفترات

درسنا فيما سبق المجموعات وإجراء عمليات التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة عليها.

فمثلًا : إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} فإن :

- س ∩ ص = مجموعة العناصر المشتركة بين س و ص = {٣ ، ٤}
- س ∪ ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س أو ص دون تكرار = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
- س − ص = مجموعة العناصر الموجودة فى س وغير موجودة فى ص = {١ ، ٢}
- ص − س = مجموعة العناصر الموجودة فى ص وغير موجودة فى س = {٥ ، ٦}
- وإذا كانت المجموعة الشاملة ش = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}

فإن : مكملة س والتى يرمز لها بالرمز سَ = ش − س

أى أن : سَ = مجموعة العناصر الموجودة فى ش وغير موجودة فى س = {٥ ، ٦ ، ٧}

والأمثلة التالية توضح إجراء عمليات التقاطع والاتحاد والفرق على الفترات :

مثال ٢

إذا كانت : س = [-٣ ، ٣] ، ص = [-١ ، ٥[فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ س ∪ ص ٢ س ∩ ص ٣ س − ص ٤ ص − س

الحل

١



س ∪ ص = [-٣ ، ٥[

٢



س ∩ ص = [-١ ، ٣]

٢



س − ص = [−٣ ، −١[

٤



ص − س =]٢ ، ٥]

مثال ٣

أوجد كلًا مما يأتي :

١]−∞ ، ٢] ∩ [−٣ ، ∞[

٢]−∞ ، ٣] ∪ [−٢ ، ٥[

٣ [٥ ، ∞[−]٥ ، ∞[

٤ [٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٢[

الحل

١



]−∞ ، ٢] ∩ [−٣ ، ∞[= [−٣ ، ٢]

٢



]−∞ ، ٣] ∪ [−٢ ، ٥[=]−∞ ، ٥[

٣



[٥ ، ∞[−]٥ ، ∞[= {٥}

٤



[٢ ، ∞[∩]−∞ ، ٢[= ∅

مثال ٤

إذا كانت : س =]−∞ ، ٢] ، ص = [−١ ، ٥] فأوجد مستعينًا بخط الأعداد

١ س ∪ ص

٢ س ∩ ص

٣ س − ص

٤ ص − س

٥ سَ

٦ صَ

الحل

١


س ∪ ص =]−∞ ، ٥]

٢


س ∩ ص = [−١ ، ٢[

٣


س − ص =]−∞ ، −١[

٤


ص − س = [٢ ، ٥]

٥


س' = [٢ ، ∞[

٦


ص' =]−∞ ، −١[∪]٥ ، ∞[

= ح − [−١ ، ٥]

مثال ٥

إذا كانت : س = [١ ، ٤[، ص = {١ ، ٤} فأوجد :

١ س ∩ ص ٢ س ∪ ص ٣ س − ص ٤ ص − س

الحل



١ س ∩ ص = {١}

٢ س ∪ ص = [١ ، ٤]

٣ س − ص =]١ ، ٤[

٤ ص − س = {٤}

حاول بنفسك ٢

إذا كانت : س = [−١ ، ٣[، ص =]٠ ، ٤] فاوجد مستعينًا بخط الأعداد ...

١ س ∩ ص

٢ س ∪ ص

٣ س − [٠ ، ∞[

٤]٠ ، ∞[− ص

٥ سَ

٦ س ∩ {−٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ...

تمارين 4

على الفترات

اختبار تفاعلي

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الجدول الآتي :

الفترة	التعبير عنها بالصفة المميزة	تمثيلها على خط الأعداد
١ [-١ ، ٢]	{س : -١ ≤ س ≤ ٢ ، س ∈ ح}	-١ ، ٢
٢ [١ ، ٢[	....	....
٣	{س : ٠ < س ≤ ٣ ، س ∈ ح}	....
٤	....	-٢ ، ٣
٥]-∞ ، ١]	....	....
٦	....	صفر
٧	{س : س > ٤ ، س ∈ ح}	....
٨ [-٢ ، ∞[	....	....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ح = ...

(أ) ح+ ∩ ح- (ب) ح+ ∪ ح- (جـ)]-∞ ، ∞[(د) ن ∩ نَ

٢ ح+ = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٣ ح- = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٤ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٥ مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = ...

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٠[(جـ) [٠ ، ∞[(د)]-∞ ، ٠]

٣ أكمل كلاً مما يأتي مستخدمًا أحد الرمزين ∈ ، ∉ :

١ ٣ .... [٥ ، ٢]	٢ -٢ .... [١ ، ٢-]
٣ صفر ....]٤ ، ١-[	٤ |-٣| .... [٠ ، ٢]
٥ $\sqrt{9}$ ....]∞ ، ٣-[	٦ $\sqrt[3]{-1}$ ....]١ ، ∞-]
٧ ١,٣ × ١٠$^{-5}$ .... ح	٨ $\sqrt{2}$ .... [٥ ، ٢]
٩ ٥ ....]$\sqrt{22}$ ، $\sqrt{5}$[	١٠ $\sqrt[3]{-125}$ ....]$\sqrt{25}$- ، ...[

٤ إذا كانت : س =]٥ ، ٢] ، ص =]٣ ، ١-[فأوجد مستعينًا بخط الأعداد

١ س ∪ ص	٢ س ∩ ص	٣ س − ص
٤ ص − س	٥ س`	٦ ص`

٥ إذا كانت : س = [٣ ، ∞-] ، ص =]∞ ، ٤-[فأوجد مستعينًا بخط الأعداد

١ س ∪ ص	٢ س ∩ ص	٣ س − ص
٤ ص − س	٥ س`	٦ ص`

٦ إذا كانت : س = [٤ ، ١-] ، ص =]∞ ، ٣] ، ع = {٤ ، ٣}

فأوجد مستعينًا بخط الأعداد كلاً من :

١ س ∪ ص	٢ س ∩ ص	٣ س − ص	٤ س...
٥ ص ∩ ع	٦ ص − س	٧ س`	٨ ص...

٧ أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ [٤ ، ١-] ∩ [٥ ، ٢]	٢ [٤ ، ١-] ∪ [٥ ، ٢]
٣]٣ ، ٢-[∩]١ ، ٠[	٤]٣ ، ٢-[∪]١ ، ٠[
٥ [٦ ، ٢] −]٣ ، ١-[	٦]٣ ، ١-[− [٦ ، ٢]

٧ [−٢ ، ٠[∪]٠ ، ٢]

٨ [−٣ ، ٠] ∩]٠ ، ٢]

٩ [١ ، ٢] − [−٢ ، ٤]

١٠ [−٢ ، ٤] − [١ ، ٢]

١١ [−١ ، ٤] ∩ [٥ ، ٧[

١٢ [−١ ، ٥] −]−١ ، ٥[

٨ أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ [−١ ، ∞[∪ [−٣ ، ٤]

٢ [٢ ، ∞[∩]−٢ ، ٣[

٣]−∞ ، ٢] ∩ [−٤ ، ∞[

٤ [٢ ، ∞[∪]−∞ ، ٣]

٥]−∞ ، ٢] − [−١ ، ∞[

٦]−∞ ، −٣] − [−٣ ، ١]

٧]−∞ ، ٢] −]−∞ ، ٠]

٨]−∞ ، ٣[∪]٤ ، ∞[

٩ أكمل ما يأتى :

١ [٣ ، ٥] ∪ {٣ ، ٥} = ...

٢]٣ ، ٥[∪ {٣ ، ٥} = ...

٣ [٣ ، ٥] ∩ {٣ ، ٥} = ...

٤]٣ ، ٥[∩ {٣ ، ٥} = ...

٥ [٣ ، ٥] − {٣ ، ٥} = ...

٦]٣ ، ٥[− {٣ ، ٥} = ...

٧ {٣ ، ٥} − [٣ ، ٥] = ...

٨ {٣ ، ٥} −]٣ ، ٥[= ....

٩]٣ ، ٥[∪ {٣} = ...

١٠ [٣ ، ٥] − {٥} = ...

١١]٢ ، ٥[∩ {−٢ ، ٣ ، ٤} = ...

١٢]−٣ ، ٥] ∪ {−٢ ، ٣ ، ٤} = ...

١٠ أكمل كلًا مما يأتى :

١]١ ، ٧[∪]٣ ، ٥[= ....

٢]−٣ ، ٢] − [٠ ، ٢] = ...

٣ [٣ ، ٤[∪]٣ ، ٤] = ...

٤]٢ ، ٥] ∩ [٢ ، ٥[= ....

٥ [٣ ، ٥] − [٢ ، ٥[= ....

٦ [٣ ، ٧] − [٤ ، ٧] = ...

٧ [٢ ، ٧] −]٢ ، ٧[= ....

٨ [−٢ ، ٤] ∩ [٤ ، ٦] = ...

٩ إذا كانت : س ∩ [٢ ، ٧] = [٣ ، ٤[فإن : س = ...

١٠ إذا كان : س عددًا حقيقيًا موجبًا فإن : س > $س^٢$ عندما س ∈]...... ، ......[

١١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ [-٣ ، ٤] - {-٣ ، ٥} = ...

(أ)]-٣ ، ٤[(ب)]-٣ ، ٤] (جـ) [-٣ ، ٥[(د) [-٣ ، ٥[

٢ إذا كانت : س ∈ [-٣ ، ∞[فإن : ....

(أ) س < -٣ (ب) س ≤ -٣ (جـ) س > -٣ (د) س ≥ -٣

٣ إذا كانت : س = {س : س ∈ ح ، ٢ < س ≤ ٥} فإن : [٣ ، ٤] ...... س

(أ) ∈ (ب) ∉ (جـ) ⊂ (د) ⊄

٤ {٣} ∩ [٣ ، ٦] = ...

(أ) ∅ (ب) {٣} (جـ)]٣ ، ٦] (د) {٦}

٥ {٨ ، ٩ ، ١٠} -]٨ ، ١٠[= ....

(أ) ∅ (ب) {٨ ، ١٠} (جـ) {٩} (د) ط

٦ مجموع الأعداد الحقيقية فى [-٧٥ ، ٧٥] هو ....

(أ) -٧٥ (ب) ٧٥ (جـ) ١٥٠ (د) صفر

١٢ أكمل ما يأتى :

١ ح ∩ [-٣ ، ٣] = ...

٢ ح ∪]-١ ، ٤] = ...

٣ ح - [-١ ، ∞[= ....

٤ $ح_-$ - [-٣ ، ١] = ...

٥]-٢ ، ٥] - $ح_+$ = ...

٦ [-٢ ، ٢] - $ح_-$ = ...

٧]-٣ ، ٢] ∩ $ص_+$ = ...

٨ ط ∩ [-٥ ، ٢[= ....

٩ ص ∩ [-١ ، ٣[= ....

١٠ $ح_+$ ∩ [٠ ، ٥] = ...

١١ $ح_-$ ∩ [-٣ ، ٢] = ...

١٣ اختر من العمود (ب) الفترة التى يمثلها الشكل فى العمود (أ) :

(أ)	(ب)
١ 	ع -]-٣ ، ١[
٢ 	ع - [-٣ ، ١]
٣ 	ع -]-٣ ، ١]
٤ 	[-٣ ، ٣[- {١}
٥ 	[-٣ ، ١]
	]-٣ ، ١]

تطبيق حياتى

١٤ نوعان من الأطعمة الأول يحتاج فى حفظه إلى درجة حرارة تتراوح بين ٣ درجات تحت الصفر و ٤ درجات فوق الصفر ، والآخر يحتاج فى حفظه إلى درجة حرارة تتراوح بين درجتين فوق الصفر و ١٠ درجات فوق الصفر فما هى درجات الحرارة التى تصلح لحفظ النوعين معًا فى نفس المكان ؟



للمتفوقين

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى الشكل المقابل :



إذا كان : س عددًا حقيقيًا فإن : س ∈ ....

(أ) ع₋ (ب) ع₊ (جـ)]-∞ ، -١[(د)]-∞ ، -١]

٢ إذا كانت : س ∈ [-٣ ، ٤] فإن : $س^2$ ∈ ....

(أ) [٩ ، ١٦] (ب) [٠ ، ٩] (جـ) [٠ ، ١٦] (د) [-٩ ، ٠]

٣ إذا كانت : س ∈ [-٥ ، ٤] فإن : $س^2$ ∈ ....

(أ) [٠ ، ١٦] (ب) [١٦ ، ٢٥] (جـ) [٠ ، ٢٥] (د) [-٢ ، ٠]

٤ إذا كانت : س ∈ [١ ، ١٦] فإن : $-\sqrt{س}$ ∈ ....

(أ) [١ ، ٤] (ب) [-١ ، ٤] (جـ) [-٤ ، -١] (د) [-٤ ، ٠]

٥ إذا كانت : س ⊂ ح ، [٢ ، ٥] − س =]٢ ، ٥[فإن : س = ...

(أ) [٢ ، ٥] (ب) {٢ ، ٥} (جـ)]٢ ، ٥[(د)]٢ ، ٥]

٦ إذا كانت : س ⊂ ح ،]٤ ، ٧] ∪ س = [١ ، ٧] فإن : س = ...

(أ) [١ ، ٣[(ب) [١ ، ٣] (جـ) [١ ، ٤] (د) [١ ، ٥]

٧ إذا كانت : م ⊂ ح ، م ∩ [٣ ، ٨[= [٣ ، ٨[فإن : م = ...

(أ)]٣ ، ٨[(ب)]٣ ، ٨] (جـ) [٣ ، ٩] (د) [٣ ، ٧]

٨ إذا كانت :]-∞ ، ك[∩ [-٢ ، ٥] = [-٢ ، ٣[فإن : ك = ...

(أ) -٢ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) صفر

٩ إذا كانت : [-١ ، س] ∩ [ص ، ٥] = [٢ ، ٣] فإن : $س^{ص}$ = ...

(أ) ٨ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ٩ (د) -١

١٦ إذا كانت : س ∩ ص = [٤ ، ٧] ، س ∪ ص = [٣ ، ٧] ، س ⊂ ح

أوجد : س ، ص ، ص − س



الدرس **5**

العمليات على الأعداد الحقيقية

أولاً عملية الجمع

• نعلم أن : ٢ س ، ٣ س هما حدان جبريان متشابهان مجموعهما هو حد جبرى مشابه لهما .

حيث : ٢ س + ٣ س = (٢ + ٣) س = ٥ س

ومن ذلك نستنتج أن :

$٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٥} = (٢ + ٣)\sqrt{٥}$

$= ٥\sqrt{٥}$

> **تذكر أن**
> • العدد الحقيقى $٢\sqrt{٥}$ ينتج من حاصل ضرب العدد النسبى ٢ فى العدد غير النسبى $\sqrt{٥}$

• نعلم أن : ٢ س ، ٣ ص هما حدان جبريان غير متشابهين ونعبر عن مجموعهما بمقدار جبرى أبسط صورة له هى : ٢ س + ٣ ص

ومن ذلك نستنتج أن : العددين الحقيقيين $٢\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ نعبر عن مجموعهما بعدد حقيقى أبسط صورة له هى : $٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢}$

مثال ١

أوجد ناتج : $-٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} + (-٢\sqrt{٥})$

الحل

$-٣\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥} + (-٢\sqrt{٥}) = (-٣ + ٤ + (-٢))\sqrt{٥} = -\sqrt{٥}$

خواص جمع الأعداد الحقيقية

الانغلاق :

لكل $أ \in ع$ ، $ب \in ع$ يكون $(أ + ب) \in ع$

أى أن : مجموع اى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى فنقول إن : ع مغلقة تحت عملية الجمع

فمثلاً : $\sqrt{5} \in ع$ ، $2\sqrt{5} \in ع$ نجد أن : $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \in ع$

الإبدال :

لكل $أ \in ع$ ، $ب \in ع$ يكون : $أ + ب = ب + أ$

فمثلاً : $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$ ، $4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$

أى أن : $5\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2}$

الدمج :

لكل $أ \in ع$ ، $ب \in ع$ ، $ح \in ع$

يكون : $(أ + ب) + ح = أ + (ب + ح) = أ + ب + ح$

فمثلاً : $(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

، $\sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) = \sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

أى أن : $(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} + (2\sqrt{3} + 5\sqrt{3})$

وجود عنصر محايد جمعي :

لكل $أ \in ع$ يكون : $أ + 0 = 0 + أ = أ$

أى أن : الصفر هو العنصر المحايد الجمعى فى ع

فمثلاً : $\sqrt[3]{2} + 0 = 0 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$ ، $-\sqrt[3]{5} + 0 = 0 + (-\sqrt[3]{5}) = -\sqrt[3]{5}$

وجود معكوس جمعي لكل عدد حقيقي :

لكل $أ \in ح$ يوجد $(-أ) \in ح$ بحيث : $أ + (-أ) = $ صفر «المحايد الجمعي»

فمثلًا : • المعكوس الجمعي للعدد $\sqrt{3}$ هو $-\sqrt{3}$ والعكس صحيح لأن : $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

• المعكوس الجمعي للعدد $2 + \sqrt{5}$ هو $-(2 + \sqrt{5})$ ويساوى $-2 - \sqrt{5}$

• المعكوس الجمعي للعدد $3 - \sqrt{2}$ هو $-(3 - \sqrt{2})$ ويساوى $\sqrt{2} - 3$

• المعكوس الجمعي للعدد صفر هو نفسه.

ملاحظة

• حيث إن كل عدد حقيقي له معكوس جمعي فإن عملية الطرح ممكنة دائمًا في ح وتعرف كما يلي :

لكل $أ \in ح$ ، $ب \in ح$ يكون : $أ - ب = أ + (-ب)$

أي أن : عملية الطرح $(أ - ب)$ تعني جمع العدد أ مع المعكوس الجمعي للعدد ب

ويمكنك استنتاج أن : عملية الطرح في ح ليست إبدالية ، وليست دامجة.

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة : $4 + \sqrt{3} - 7 - \sqrt{3}$

الحل

$4 + \sqrt{3} - 7 - \sqrt{3} = (4 - 7) + (\sqrt{3} - \sqrt{3}) = -3 + 0 = -3$

حاول بنفسك ١

١ اكتب المعكوس الجمعي لكل من الأعداد التالية :

$\sqrt{2}$ ، $-\sqrt[3]{5}$ ، $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ، $\sqrt[3]{5} - 3$ ، $-\sqrt{6} - \sqrt[3]{7}$

---

٢ اختصر لأبسط صورة :

(١) $2 + 2\sqrt{7} - 1 - 5\sqrt{7}$

(٢) $3\sqrt{5} + \sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$

ثانيًا عملية الضرب

- نعلم أن : ٣ × ٢ س = (٣ × ٢) س = ٦ س

وعلى هذا فإن : $٣ × ٢\sqrt{٣} = (٣ × ٢)\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٣}$

- كما نعلم أن : ٢ س × ٥ س = (٢ × ٥) (س × س) = ١٠ س^{٢}

وعلى هذا فإن : $٢\sqrt{٣} × ٥\sqrt{٣} = (٢ × ٥) \left(\sqrt{٣} × \sqrt{٣}\right) = ١٠ × \left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$

$= ١٠ × ٣ = ٣٠$

مثال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١ $-٢ × ٣\sqrt{٥}$ ٢ $٤\sqrt{٢} × \sqrt{٢}$ ٣ $-٢\sqrt{٧} × ٤\sqrt{٧}$

الحل

١ $-٢ × ٣\sqrt{٥} = (-٢ × ٣)\sqrt{٥} = -٦\sqrt{٥}$

٢ $٤\sqrt{٢} × \sqrt{٢} = ٤ × \left(\sqrt{٢}\right)^{٢} = ٤ × ٢ = ٨$

٣ $-٢\sqrt{٧} × ٤\sqrt{٧} = (-٢ × ٤) × \left(\sqrt{٧}\right)^{٢} = -٨ × ٧ = -٥٦$

خواص ضرب الأعداد الحقيقية

الانغلاق :

لكل أ ∈ ح ، ب ∈ ح يكون : (أ × ب) ∈ ح

أى أن : حاصل ضرب أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى ونقول إن : ح مغلقة تحت عملية الضرب

فمثلًا : $\sqrt{٣}$ ∈ ح ، $٢\sqrt{٣}$ ∈ ح نجد أن : $\sqrt{٣} × ٢\sqrt{٣} = ٢ × ٣ = ٦$ ∈ ح

الإبدال :

لكل $أ \in ح$ ، $ب \in ح$ يكون $أ \times ب = ب \times أ$

فمثلاً : $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 6 \times 5 = 30$ ، $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 5 = 30$

أى أن : $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$

الدمج :

لكل $أ \in ح$ ، $ب \in ح$ ، $حـ \in ح$

يكون : $(أ \times ب) \times حـ = أ \times (ب \times حـ) = أ \times ب \times حـ$

فمثلاً : $(2\sqrt{7} \times 4\sqrt{7}) \times \sqrt{7} = 56 \times \sqrt{7} = 56\sqrt{7}$

، $2\sqrt{7} \times (4\sqrt{7} \times \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \times 28 = 56\sqrt{7}$

أى أن : $(2\sqrt{7} \times 4\sqrt{7}) \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7} \times (4\sqrt{7} \times \sqrt{7})$

وجود عنصر محايد ضربى :

لكل $أ \in ح$ يكون : $أ \times 1 = 1 \times أ = أ$

أى أن : الواحد هو العنصر المحايد الضربى فى ح فمثلاً : $\sqrt[3]{5} \times 1 = 1 \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}$

وجود معكوس ضربى لكل عدد حقيقى لا يساوى الصفر :

لكل عدد حقيقى $أ \neq$ صفر يوجد عدد حقيقى $\frac{1}{أ}$ بحيث : $أ \times \frac{1}{أ} = 1$ «المحايد الضربى»

فمثلاً :
- المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{3}$ هو $\frac{1}{\sqrt{3}}$

  لأن : $\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$
- المعكوس الضربى للعدد $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ هو $-\frac{5}{\sqrt{2}}$
- المعكوس الضربى للعدد 1 هو نفسه ، والمعكوس الضربى للعدد -1 هو نفسه.

لاحظ أن
- العدد ومعكوسه الضربى لهما نفس الإشارة.
- لا يوجد معكوس ضربى للصفر (لأن : $\frac{1}{0}$ ليس لها معنى).

ملاحظة

- حيث إن كل عدد حقيقى لا يساوى الصفر له معكوس ضربى ؛ فإن عملية القسمة على أى عدد حقيقى خلاف الصفر ممكنة فى ح وتعرف كما يلى :

لكل أ ∈ ح ، ب ∈ ح − {٠} يكون : أ ÷ ب = أ × $\frac{١}{ب}$

أى أن : عملية القسمة (أ ÷ ب) تعنى ضرب العدد أ فى المعكوس الضربى للعدد ب بشرط ب ≠ ٠.

يمكنك استنتاج أن : عملية القسمة فى ح ليست إبدالية ، وليست دامجة.

مثال ٤

أوجد ناتج ما يأتى : $\frac{\sqrt{٥}}{٥} \times \frac{٤\sqrt{٥}}{١٢\sqrt{٢}} \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}}$

الحل

$$\left(\frac{\sqrt{٥}}{٥} \times \frac{٤\sqrt{٥}}{١٢\sqrt{٢}}\right) \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٥}{١٥\sqrt{٢}} \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \div \frac{١}{٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٣\sqrt{٢}} \times ٣\sqrt{٢} = ١$$

مثال ٥

اكتب كلاً مما يأتى بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

١ $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ ٢ $-\frac{٣}{\sqrt{٢}}$ ٣ $\frac{٥}{٣\sqrt{٥}}$

الحل

١ بضرب حدى العدد $\frac{٩}{\sqrt{٣}}$ فى $\sqrt{٣}$

يكون : $\frac{٩}{\sqrt{٣}} = \frac{٩}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٩\sqrt{٣}}{٣} = ٣\sqrt{٣}$

لاحظ أن

$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ١$ «المحايد الضربى»

٢ $-\frac{٣}{\sqrt{٢}} = -\frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = -\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

٣ $\frac{٥}{٣\sqrt{٥}} = \frac{٥}{٣\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٥\sqrt{٥}}{٣ \times ٥} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

حل آخر : ∵ $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = ٥$ ∴ $\frac{٥}{٣\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}{٣\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$

حاول بنفسك ٢

١ أوجد كلًا مما يأتى :

(١) $\sqrt{٥} \times \frac{١}{\sqrt{٥}} \times \sqrt{٥}$

(٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٣} \times \frac{٤\sqrt{٥}}{٢٠} \times \frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}$

٢ اجعل المقام عددًا صحيحًا :

(١) $\frac{٣}{\sqrt{٧}}$

(٢) $\frac{٩}{٢\sqrt{٦}}$

توزيع الضرب على الجمع والطرح :

لأى ثلاثة أعداد حقيقية أ ، ب ، حـ يكون :

- أ (ب ± حـ) = أ ب ± أ حـ
- (ب ± حـ) أ = ب أ ± حـ أ

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتى :

١ $٢\sqrt{٣}\,(٥\sqrt{٣} - ٤)$

٢ $(٢ + \sqrt{٣})\,(\sqrt{٣} + ٧)$

٣ $(٧\sqrt{٢} - ٥)\,(٧\sqrt{٢} + ٥)$

٤ $(٥\sqrt{٣} - ٢)^{٢}$

الحل

١ $٢\sqrt{٣}\,(٥\sqrt{٣} - ٤) = ٢\sqrt{٣} \times ٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} \times (-٤)$

$= ١٠ \times ٣ - ٨\sqrt{٣} = ٣٠ - ٨\sqrt{٣}$

٢ $(٢ + \sqrt{٣})\,(\sqrt{٣} + ٧) = ٢\,(\sqrt{٣} + ٧) + \sqrt{٣}\,(\sqrt{٣} + ٧)$

$= ٢ \times \sqrt{٣} + ٢ \times ٧ + \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} + \sqrt{٣} \times ٧$

$= ٢\sqrt{٣} + ١٤ + ٣ + ٧\sqrt{٣}$

$= (٢\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٣}) + (١٤ + ٣) = ٩\sqrt{٣} + ١٧$

٣ $(٧\sqrt{٢} - ٥)(٧\sqrt{٢} + ٥) = ٩٨ + ٣٥\sqrt{٢} - ٣٥\sqrt{٢} - ٢٥ = ٧٣$

حل آخر باستخدام الضرب بمجرد النظر :

$(٧\sqrt{٢} - ٥)(٧\sqrt{٢} + ٥) = (٧\sqrt{٢})^٢ - (٥)^٢$

$= ٧^٢ \times (\sqrt{٢})^٢ - ٥^٢$

$= ٤٩ \times ٢ - ٢٥$

$= ٩٨ - ٢٥ = ٧٣$

> **لاحظ أن**
> $(أ + ب)(أ - ب) = أ^٢ - ب^٢$

٤ باستخدام الضرب بمجرد النظر :

$\therefore (٥\sqrt{٣} - ٢)^٢ = (٥\sqrt{٣})^٢ - ٢ \times ٥\sqrt{٣} \times ٢ + (-٢)^٢$

$= ٥^٢ \times (\sqrt{٣})^٢ - ٢٠\sqrt{٣} + ٤$

$= ٢٥ \times ٣ - ٢٠\sqrt{٣} + ٤$

$= ٧٥ - ٢٠\sqrt{٣} + ٤ = ٧٩ - ٢٠\sqrt{٣}$

> **لاحظ أن**
> • $(أ + ب)^٢ = أ^٢ + ٢أب + ب^٢$
> • $(أ - ب)^٢ = أ^٢ - ٢أب + ب^٢$

مثال ٧

إذا كانت : $س = ٥\sqrt{٣} - ٢$ ، $ص = ٥\sqrt{٣} + ٢$

أوجد قيمة المقدار : $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$

الحل

من الضرب بمجرد النظر نلاحظ أن : $(س + ص)^٢ = س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$

$\therefore س^٢ + ٢ س ص + ص^٢ = (٥\sqrt{٣} - ٢ + ٥\sqrt{٣} + ٢)^٢$

$= (١٠\sqrt{٣})^٢ = (١٠)^٢ \times (\sqrt{٣})^٢ = ١٠٠ \times ٣ = ٣٠٠$

مثال ٨

أعط تقديرًا لناتج : $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ وتحقق من صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

الحل

أولاً : تقدير $\sqrt{١٠}$ هو ٣ (لأن : $\sqrt{٩} = ٣$) ∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})$ هو $٥ + ٣ = ٨$

، تقدير $\sqrt[٣]{٧}$ هو ٢ (لأن : $\sqrt[٣]{٨} = ٢$) ∴ تقدير $(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو $٣ - ٢ = ١$

∴ تقدير $(٥ + \sqrt{١٠})(٣ - \sqrt[٣]{٧})$ هو $٨ \times ١ = ٨$

ثانيًا : باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن الناتج هو ٨٫٨٧٢٩ أى أن التقدير مقبول.

حاول بنفسك ٣

١ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) $٥\sqrt{٢}\,(٣\sqrt{٢} - ٢)$ (٢) $(٢\sqrt{٣} - ٣)(٢\sqrt{٣} + ٣)$

٢ إذا كانت : $س = ٢\sqrt{٣} - ١$ ، $ص = ٢\sqrt{٣} + ١$ أوجد قيمة : $س^٢ - ٢\,س\,ص + ص^٢$

٣ أعط تقديرًا لناتج :

$(١ + \sqrt{١٥})(٤ - \sqrt{٨})$ وتحقق من صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

تمارين 5

على العمليات على الأعداد الحقيقية

أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد كلًا مما يأتي في أبسط صورة :

١) $\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢}$

٢) $٣\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢}$

٣) $٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٥} + \sqrt{٥}$

٤) $٥\sqrt[٣]{٧} - ٨\sqrt[٣]{٧} + ٢\sqrt[٣]{٧}$

٥) $٤\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥} - \sqrt{٥}$

٦) $٥\sqrt{٣} - ٧\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٢} - \sqrt{٢}$

٢ أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة :

١) $\sqrt{٥} - \sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$

٢) $٢\sqrt{٣} + ٥ + \sqrt{٣} - ٦$

٣) $٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٧} + ٥\sqrt{٧}$

٤) $٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt[٣]{٢} + ٥\sqrt{٢} + \sqrt[٣]{٢}$

٥) $\frac{١}{٤}\sqrt{٢} + \frac{٢}{٧}\sqrt{٥} + \frac{٣}{٤}\sqrt{٢} - \frac{٢}{٧}\sqrt{٥}$

٦) $٨\sqrt{\frac{١}{٤}} + ٢\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٦٤} - ٥\sqrt[٣]{٢}$

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي :

١) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

٢) $-٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥}$

٣) $٢ \times ٣\sqrt{٢}$

٤) $\frac{١}{٢}\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}$

٥) $(\sqrt[٣]{٥})^{٣} \times ٣\sqrt{٣}$

٦) $٢\sqrt{٣} \times \frac{٢\sqrt{٧}}{٧} \div$ [illegible]

٤ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

١) $٢(\sqrt{٢} + \sqrt{٥})$

٢) $\sqrt{٢}(٥ + \sqrt{٢})$

٣) $\sqrt{٧}(\sqrt{٧} + ٢)$

٤) $-\sqrt{٣}(-٥ - \sqrt{٣})$

٥) $-٢\sqrt{٥}(٣ - \sqrt{٥})$

٦) $\sqrt{٧}\left(\frac{٢}{\sqrt{٧}} - \sqrt{٧} + ٣\right)$

٧) $-٣(٨ + ٢\sqrt{٣}) + ٦\sqrt{٣}$

٨) $\sqrt{٥}(٣ - \sqrt{٥}) - ٢(١ +$ [illegible]

٥ أوجد ناتج كل من العمليات الآتية :

١ $(\sqrt{٢}+١)(\sqrt{٢}-١)$

٢ $(٤-٣\sqrt{٢})(٤+٣\sqrt{٢})$

٣ $(\sqrt{٥}-١)^{٢}$

٤ $(٢\sqrt{٣}+٤)^{٢}$

٥ $(\sqrt{٣}+٢)(\sqrt{٣}-١)$

٦ $(٥-\sqrt{٣})^{٢}-٢٨$

٦ اجعل المقام فى كل مما يأتى عددًا صحيحًا :

١ $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$

٢ $\frac{١٠}{\sqrt{٥}}$

٣ $-\frac{٦}{\sqrt{٢}}$

٤ $\frac{٨}{\sqrt{٦}}$

٥ $\frac{٢}{٣\sqrt{٢}}$

٦ $\frac{٦}{٢\sqrt{٣}}$

٧ $\frac{٢٥}{٢\sqrt{١٠}}$

٨ $\frac{\sqrt{٢}+٣}{\sqrt{٢}}$

٩ $\frac{\sqrt{٥}-١٥}{٢\sqrt{٥}}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\sqrt{٧}+\sqrt{٧}=$ ....

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) $٢\sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{١٤}$

٢ $\sqrt{٣}+(-\sqrt{٣})=$ ....

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٦}$ (جـ) $\sqrt{٦}$ (د) صفر

٣ $٢\sqrt{٣}+٣\sqrt{٣}=$ ....

(أ) $٥\sqrt{٦}$ (ب) $٥\sqrt{٣}$ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٥\sqrt[٣]{٣}$

٤ $٥+٧\sqrt{٢}-٤+\sqrt{٢}=$ ....

(أ) ١٥ (ب) $١+٧\sqrt{٢}$ (جـ) $١+٨\sqrt{٢}$ (د) $١+٦\sqrt{٢}$

٥ $-٢\sqrt{٣}\times\sqrt{٣}=$ ....

(أ) -٦ (ب) $-٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) ٦

٦ $(٢\sqrt[٣]{٥})^{٣}=$ ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٤\sqrt[٣]{٥}$ (د) ٤٠

٧ المعكوس الجمعى للعدد $\frac{٦}{\sqrt{٢}}$ هو ....

(أ) $-٢\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (جـ) $-٣\sqrt{٢}$ (د) $٣\sqrt{٢}$

٨ المعكوس الجمعى للعدد $(\sqrt{٢} - \sqrt{٥})$ هو ....

(أ) $\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$ (ب) $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ (د) $-\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$

٩ المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٥}$ هو ....

(أ) -٥ (ب) $\frac{-١}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$

١٠ المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٦}$ (د) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

١١ $(\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٥}) \div \sqrt{٥} =$ ....

(أ) $٣\sqrt{٥}$ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

١٢ إذا كانت : $س = \sqrt{٢} + ١٠$ ، $ص = \sqrt{٢} - ١٠$

فإن : $(س + ص)^{٢} =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) $٤\sqrt{٢}$

٨ أكمل ما يأتى :

١ المحايد الضربى فى ح هو .... والمحايد الجمعى فى ح هو ....

٢ 📖 المعكوس الجمعى للعدد $١ - \sqrt{٢}$ هو ....

٣ المعكوس الضربى للعدد $\frac{٢\sqrt{٣}}{٥}$ هو $\frac{.....}{٦}$

٤ المعكوس الضربى للعدد $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ هو $\frac{.....}{\sqrt{٣}}$

٥ 📖 $٧ + \sqrt{٣} = ٥ + ($.......... + ...$)$

٦ إذا كانت : $أ = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ، $ب = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ فإن : $\frac{أ}{ب} =$ ....

٧ $(\sqrt{٣} - ٢)^{٢} = ٧ -$ ....

٨ إذا كان : $\sqrt{س} = \sqrt{٢} + ١$ فإن : س = ...

٩ إذا كانت : $س^{٢} = (٢\sqrt{٣} - \sqrt{٧})(٢\sqrt{٣} + \sqrt{٧})$ فإن : س = ...

١٠ إذا كان : $س^{٢} - ص^{٢} = ١٦$ ، $س - ص = \sqrt{٢}$ فإن : س + ص = ...

١١ إذا كان طول ضلع مربع ل سم ومساحته ١٥ سم^{٢} فإن مساحة المربع الذى طول ضلعه ٢ ل سم تساوى ....

١٢ إذا كانت : أ ∈ ع ، ب ∈ ع فإن : أ − ب تعنى ناتج جمع العدد أ و .... للعدد ب

١٣ إذا كانت : أ ∈ ط ، ب ∈ ن ، حـ ∈ ع فإن : (أ + ب + حـ) ∈ ....

---

٩ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} - ٢$ ، $ص = \sqrt{٥} + ٢$

فأوجد قيمة كل من :

١ س + ص	٢ س − ص	٣ س ص
٤ $س^{٢} - ص^{٢}$	٥ $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$	٦ $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢}$

---

١٠ إذا كان : $أ - ب = ٢\sqrt{٣}$ **فأوجد قيمة :** $أ (أ - ب)^{٣} + ب (ب - أ)^{٣}$ «١٤٤»

---

١١ إذا كانت : $س = \sqrt{٣ + \sqrt{٢}}$ **فأوجد قيمة :** $س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١$ «$٦ + ٤\sqrt{٢}$»

---

١٢ إذا كانت : $س = ٣ + \sqrt{٥}$ ، $ص = ١ + \sqrt{٨}$

قدر قيمة كل مما يأتى :

١ س ، ص ٢ س + ص ٣ س − ص ٤ س ص

ثم اختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

١٣ إذا كانت : س = √١٥ + ٢ ، ص = ٤ − √٢٥

قدر قيمة كل من :

[١] س ، ص [٢] س × ص [٣] س + ص

اختبر صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة.

تطبيق هندسى

١٤ مستطيل بعداه (٦ + √٥) سم ، (٦ − √٥) سم ، احسب محيطه ومساحته.

تطبيق حياتى



١٥ إذا كانت مساحة كل مربع صغير من المربعات التى تتكون منها لوحة شطرنج أحمد تساوى ١٣ سم²

فأوجد : [١] طول ضلع لوحة الشطرنج.

[٢] طول قطر لوحة الشطرنج.

للمتفوقين

١٦ إذا كان المعكوس الضربى للعدد √أ − ١ هو $\frac{\sqrt{أ} + ١}{٤}$ فأوجد القيمة العددية للعدد أ

١٧ إذا كان : س = ٢ ص = ٤ ع = √٢

فأوجد قيمة : س² + ٢ ص² + ٤ ع²

١٨ إذا كان العدد ص معكوسًا جمعيًا للعدد س ، $\frac{١}{٢}$ (ص − س) = ١ − √٢

أثبت أن : س ص − ٢ √٢ = −٣

ملخص الجزء الأولى

من الوحدة الأولى (من درس 1 حتى درس 5)

- الجذر التكعيبى للعدد أ هو العدد الذى مكعبه يساوى أ

  مثل : $\sqrt[3]{٦٤} = ٤$ ، $\sqrt[3]{-٦٤} = -٤$

- الجذر التكعيبى للعدد الموجب يكون موجبًا ، والجذر التكعيبى للعدد السالب يكون سالبًا.

- $\sqrt[3]{أ^{٣}} = أ$ مثل $\sqrt[3]{(-٥)^{٣}} = -٥$ ، $\sqrt[3]{أ^{ن}} = أ^{\frac{ن}{٣}}$ حيث $ن \in ص$ مثل : $\sqrt[3]{أ^{٦}} = أ^{\frac{٦}{٣}} = أ^{٢}$

- إذا كان أ عددًا مكعبًا كاملًا فإن المعادلة : $س^{٣} = أ$ لها حل وحيد فى ح هو $\sqrt[3]{أ}$

- كل عدد غير نسبى تقع قيمته بين عددين نسبيين ، ويمكن تمثيله بنقطة على خط الأعداد.

- مجموعة الأعداد النسبية ن ومجموعة الأعداد غير النسبية نَ مجموعتان منفصلتان

  أى أن : $ن \cap نَ = \emptyset$

- $ح = ن \cup نَ$ ، $ح - ن = نَ$ ، $ح - نَ = ن$

- $ح = ح_{+} \cup \{٠\} \cup ح_{-} =]-\infty ، \infty[$ ، $ح_{+} \cap ح_{-} = \emptyset$

  ، $ح_{+} =]٠ ، \infty[$ ، $ح_{-} =]-\infty ، ٠[$

  ، مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة = $ح_{+} \cup \{٠\} = [٠ ، \infty[$

  ، مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة = $ح_{-} \cup \{٠\} =]-\infty ، ٠]$

  ، $ح^{*} = ح - \{٠\} = ح_{+} \cup ح_{-}$

- يمكن إجراء عمليات التقاطع والاتحاد والفرق والمكملة على الفترات.

- مجموعة الأعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع والطرح والضرب ، وغير مغلقة تحت عملية القسمة.

- كل من عملية الجمع والضرب فى ح إبدالية ودامجة ، بينما كل من عملية الطرح والقسمة فى ح ليست إبدالية وليست دامجة.

- الصفر هو العدد المحايد الجمعى فى ح ، الواحد هو العدد المحايد الضربى فى ح

- لكل عدد حقيقى أ معكوس جمعى هو العدد الحقيقى $-أ$ ، ولكل عدد حقيقى أ لا يساوى الصفر معكوس ضربى هو $\frac{١}{أ}$

- الضرب فى مجموعة الأعداد الحقيقية يتوزع على الجمع والطرح من اليمين ومن اليسار.



امتحانات على الجزء الأول

من الوحدة الأولى (من درس 1 حتى درس 5)

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $[-٢ ، ٥] - \{-٢ ، ٥\} =$ ....

(أ) $\{-٢ ، ٥\}$ (ب) $[-٢ ، ٥[$ (جـ) $]-٢ ، ٥[$ (د) $]-٢ ، ٥]$

٢ ن ∩ نَ = ...

(أ) ص (ب) ع (جـ) نَ (د) $\varnothing$

٣ $\sqrt{س^{٤}} = \sqrt[٣]{..........}$

(أ) $س^{٦}$ (ب) $س^{٤}$ (جـ) $س^{٢}$ (د) س

٤ العدد غير النسبى المحصور بين ٣ ، ٤ هو ....

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) $\sqrt{١٠}$ (جـ) $\sqrt[٣]{١٢}$ (د) $٣\frac{١}{٤}$

٥ المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣}$ هو ....

(أ) $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$ (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٦ إذا كان : $\frac{س}{٤} = \frac{١٦}{س^{٢}}$ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢ أكمل ما يأتى :

١ $\sqrt[٣]{٤ + ...} = ٢$

٢ المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{٥}$ سم تكون مساحته .... $سم^{٢}$

٣ ع - ن = ...

٤ $[-٢ ، ٧] \cap]-٢ ، ٧[=$ ....

٥ المعكوس الجمعى للعدد $٥ - \sqrt{٣}$ هو ....

٣ (أ) إذا كانت : س = [-٢ ، ٣] ، ص = [١ ، ٥[

أوجد مستعينًا بخط الأعداد كلًا من :

١ س ∩ ص　　٢ س ∪ ص　　٣ ص - س

(ب) أوجد مجموعة الحل فى ح للمعادلة : (س^٢ - ٤) (س^٣ - ٧) = ٠ .

٤ (أ) أثبت أن : √١٢ ينحصر بين ٣,٤ ، ٣,٥

(ب) مربع طول ضلعه ٥ سم　أوجد طول قطره.

٥ (أ) عين النقطة التى تمثل العدد √٥ على خط الأعداد.

(ب) أوجد ناتج كل من العمليتين الآتيتين :

١ (√٣ + ١) (√٣ - ١)　　٢ (√٧ + ٢) (√٧ - ١)

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ٥ ∈ ....

(أ)]٣ ، ٧[　(ب)]٥ ، ٧[　(جـ) (-٥ ، ٥)　(د) {٥٥}

٢ العدد غير النسبى فى الأعداد التالية هو ....

(أ) √(٤/٢٥)　(ب) ∛١　(جـ) √(٢٧/٨)　(د) ∛(١/٦٤)

٣ إذا كان : - √٤ = ∛س　فإن : س = ...

(أ) ٨　(ب) -٨　(جـ) ٤　(د) ١٦

٤ √٤ - ∛-٨ = ...

(أ) -٢　(ب) ٤　(جـ) -٤　(د) ٨

٥ {٢ ، ٥ ، ٧} -]٢ ، ٧[= ....

(أ) {٢}　(ب) {٢ ، ٥}　(جـ)]٢ ، ٥[　(د) [٢ ، ٥]

٩ $(\sqrt{٣-})^٢ =$ ....

(أ) ٣ (ب) ‎-٣ (جـ) ± ٣ (د) $\sqrt[٢]{-٩}$

٢ أكمل ما يأتى :

١ المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٧} - \sqrt{٢}$ هو ....

٢ ح ∪ ح$_-$ = ...

٣ $[-٤ ، ٦] -$ ح$_+$ = ...

٤ مجموع الأعداد الحقيقية فى الفترة $[-٣ ، ٣]$ هو ....

٥ مجموعة حل المعادلة : س^٢ + ٢٥ = ٠ فى ح هى ....

٣

(أ) أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة : $٢\sqrt{٧} - ٥\sqrt{٢} + \sqrt{٧} + ٥\sqrt{٢}$

(ب) إذا كانت : س = $]-\infty ، ١[$ ، ص = $[-٢ ، ٤]$

أوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد كلًا من :

١ س ∪ ص ٢ س ∩ ص ٣ سَ

٤

(أ) أوجد فى نَ مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين :

١ $\frac{١}{٢}$ س^٢ - ٣ = ٧

٢ ١٢٥ س^٣ - ٣ = ٥

(ب) أثبت أن : $\sqrt[٣]{١٧}$ ينحصر بين ٢,٥٧ ، ٢,٥٨

٥

(أ) اختصر لأبسط صورة :

١ $(٢\sqrt{٣} - ٥)^٢$

٢ $\sqrt{٥}(\sqrt{٥} + ٢)$

(ب) اكتب أربعة أعداد غير نسبية محصورة بين ١١ ، ١٢

الدرس

6

العمليات على الجذور التربيعية

* إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :

١ $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أب}$

فمثلًا : • $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٢} = \sqrt{٣٦} = ٦$ • $\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$

٢ $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ (حيث ب ≠ ٠)

فمثلًا : • $\frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٨}{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$ • $\sqrt{\frac{١٦}{٤٩}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٤٩}} = \frac{٤}{٧}$

٣ $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} \times \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ب}} = \frac{\sqrt{أب}}{ب}$ (حيث ب ≠ ٠)

تستخدم هذه العملية لجعل المقام عددًا صحيحًا.

فمثلًا : • $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٥}$ • $\sqrt{\frac{٣}{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

ملاحظات

١ $\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}} \neq أ + ب$ ، $\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}} \neq أ - ب$

فمثلًا : • $\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}} \neq ٦ + ٨$ لأن : $\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

• $\sqrt{٢٥ - ٩} \neq ٥ - ٣$ لأن : $\sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$

٢ $أ\sqrt{ب} = \sqrt{أ^{٢} ب}$

فمثلًا : • $٢\sqrt{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٤ \times \frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}$

• $١٥\sqrt{\frac{١}{٣}} = ٥ \times ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} = ٥\sqrt{٩ \times \frac{١}{٣}} = ٥\sqrt{٣}$

مثال ١

ضع كلًا مما يأتي على صورة $أ\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

١ $\sqrt{٢٧}$ ٢ $٥\sqrt{٥٤}$ ٣ $٣\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ ٤ $\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}}$

الحل

١ $\sqrt{٢٧} = \sqrt{٩ \times ٣} = \sqrt{٩} \times \sqrt{٣} = ٣\sqrt{٣}$

٢ $٥\sqrt{٥٤} = ٥\sqrt{٩ \times ٦} = ٥ \times \sqrt{٩} \times \sqrt{٦} = ٥ \times ٣ \times \sqrt{٦} = ١٥\sqrt{٦}$

٣ $٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٣ \times \frac{\sqrt{٦}}{٣} = \sqrt{٦}$

حل آخر : $٣\sqrt{\frac{٢}{٣}} = \sqrt{٣^{٢} \times \frac{٢}{٣}} = \sqrt{٣ \times ٢} = \sqrt{٦}$

٤ $\frac{\sqrt{٨٤}}{\sqrt{٧}} = \sqrt{\frac{٨٤}{٧}} = \sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

مثال ٢

اختصر لأبسط صورة :

١ $\sqrt{٤٥} - ٢\sqrt{٢٠} + ٢\sqrt{٥}$

٢ $٢\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - ٤٢\sqrt{\frac{١}{٢}}$

٣ $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - \frac{٦}{\sqrt{٣}}$

الحـــل

١ $\sqrt{٤٥} - ٢\sqrt{٢٠} + ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٩ \times ٥} - ٢\sqrt{٤ \times ٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= \sqrt{٩} \times \sqrt{٥} - ٢ \times \sqrt{٤} \times \sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٢ \times ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

$= ٣\sqrt{٥} - ٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} = \sqrt{٥}$

٢ $٢\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - ٤٢\sqrt{\frac{١}{٢}} = ٢\sqrt{٩ \times ٢} + \sqrt{٢٥ \times ٢} - ٤٢ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٢}}$

$= ٢ \times \sqrt{٩} \times \sqrt{٢} + \sqrt{٢٥} \times \sqrt{٢} - ٤٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= ٢ \times ٣\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} - ٢١\sqrt{٢} = -١٠\sqrt{٢}$

٣ $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - \frac{٦}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٩ \times ٣} - ٣ \times \frac{\sqrt{١}}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} - \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$= ٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣} - \frac{٦\sqrt{٣}}{٣}$

$= ٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = ٣\sqrt{٣}$

مثال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١ $٢\sqrt{٣}\,(\sqrt{٦} + ٥)$ ٢ $(٣\sqrt{٢} - ٥)(٣\sqrt{٢} + ٥)$ ٣ $(\sqrt{٢} + \sqrt{٦})^{٢}$

الحل

١ $٢\sqrt{٣}\,(\sqrt{٦} + ٥) = ٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٦} + ٢\sqrt{٣} \times ٥ = ٢\sqrt{١٨} + ١٠\sqrt{٣}$

$= ٢\sqrt{٩ \times ٢} + ١٠\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٢} + ١٠\sqrt{٣}$

٢ $(٣\sqrt{٢} - ٥)(٣\sqrt{٢} + ٥) = (٣\sqrt{٢})^{٢} - (٥)^{٢}$

$= ٣^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢} - (٥)^{٢}$

$= ٩ \times ٢ - ٢٥ = ١٨ - ٢٥ = -٧$

تذكر أن

$(أ - ب)(أ + ب) = أ^{٢} - ب^{٢}$

٣ $(\sqrt{٢} + \sqrt{٦})^{٢} = (\sqrt{٢})^{٢} + ٢ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٦} + (\sqrt{٦})^{٢}$

$= ٢ + ٢\sqrt{١٢} + ٦$

$= ٨ + ٢\sqrt{٤ \times ٣} = ٨ + ٤\sqrt{٣}$

تذكر أن

- $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$
- $(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$

مثال ٤

إذا كانت : $أ = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ فأوجد قيمة : $أ^{٢} + ٢\sqrt{٣}$

الحل

لتسهيل الحل نجعل المقام عددًا صحيحًا بضرب البسط والمقام فى $\sqrt{٢}$

$$\therefore أ = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} \times \sqrt{٢} - \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{١٢} - ٢}{٢} = \frac{\sqrt{٤ \times ٣} - ٢}{٢} = \frac{٢\sqrt{٣} - ٢}{٢} = \frac{٢(\sqrt{٣} - ١)}{٢} = \sqrt{٣} - ١$$

$$\therefore أ^{٢} = (\sqrt{٣} - ١)^{٢} = (\sqrt{٣})^{٢} - ٢ \times \sqrt{٣} \times ١ + ١$$

$$= ٣ - ٢\sqrt{٣} + ١ = ٤ - ٢\sqrt{٣}$$

$$\therefore أ^{٢} + ٢\sqrt{٣} = ٤ - ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٣} = ٤$$

طريقة أخرى لتبسيط أ :

$$\because أ = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} \qquad \therefore أ = \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}} - \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٦}{٢}} - ١ = \sqrt{٣} - ١$$

حاول بنفسك

١ اختصر لأبسط صورة :

(١) $\sqrt{٧٥} - ٢\sqrt{٢٧} + \sqrt{٣}$ (٢) $٢\sqrt{٥٠} - ٣\sqrt{٢} - ٤\sqrt{\frac{١}{٨}}$

٢ اكتب كلًّا مما يأتي بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

(١) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٥}}$ (٢) $\frac{١ + \sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣}}$



تمارين 6

على العمليات على الجذور التربيعية

📖 أسئلة كتاب الوزارة

١ ضع كلًا مما يأتي على صورة أ $\sqrt{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة :

١ 📖 $\sqrt{١٢}$

٢ 📖 $\sqrt{٢٨}$

٣ 📖 $٢\sqrt{٧٢}$

٤ $\frac{٢}{٥}\sqrt{١٠٠٠}$

٥ $٢\sqrt{\frac{١}{٢}}$

٦ $٦\sqrt{\frac{٢}{٣}}$

---

٢ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

١ 📖 $\sqrt{٥٠} + \sqrt{٨}$ «$٧\sqrt{٢}$»

٢ 📖 $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥}$ «$-\sqrt{٥}$»

٣ $٣\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨}$ «$٢\sqrt{٢}$»

٤ $\sqrt{٩٨} - \sqrt{١٢٨} - \sqrt{١٨} + ٤\sqrt{٢}$ «صفر»

٥ 📖 $٢\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} + \frac{١}{٣}\sqrt{١٦٢}$ «$١٤\sqrt{٢}$»

٦ $\sqrt{٩٨} + \sqrt{٥٠} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٠٠} - \sqrt{٢}$ «$٦\sqrt{٢}$»

٧ 📖 $\sqrt{٢٧} + ٥\sqrt{١٨} - \sqrt{٣٠٠}$ «$١٥\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٣}$»

---

٣ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

١ $٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٢٠} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$ «$٩\sqrt{٥}$»

٢ $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$ «$\sqrt{٢}$»

٣ 📖 $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{١٢} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$ «$\sqrt{٥}$»

٤ $\sqrt{٣} + \frac{٣}{\sqrt{٣}} - \sqrt{٢} \times \sqrt{٦}$ «صفر»

٥ $\sqrt{١٨} - \frac{\sqrt{١٢}}{\sqrt{٦}}$ «$٢\sqrt{٢}$»

٦ $\sqrt{(-٥)^{٢}} + \sqrt{١٨} - \frac{٦}{\sqrt{٢}}$

٤ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

١) $٢\sqrt{٣} \times ٥\sqrt{٢}$ «$١٠\sqrt{٦}$»

٢) $٢\sqrt{١٨} \times ٣\sqrt{٢}$ «٣٦»

٣) $\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{١٠}$ «$١٠\sqrt{٢}$»

٤) $\sqrt{\frac{٢}{٧}} \times \sqrt{\frac{٧}{٢}}$ «١»

٥) $\frac{٣\sqrt{١٥}}{\sqrt{٥}}$ «$٣\sqrt{٣}$»

٦) $١٢\sqrt{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt{٥٤}$ «٧٢»

٥ اختصر كلًا مما يأتي لأبسط صورة :

١) $\sqrt{٦}\left(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}\right)$

٢) $٥\sqrt{٢}\left(٢\sqrt{٣} + \sqrt{١٢}\right)$

٣) $\left(٣\sqrt{٥} - \sqrt{٧}\right)\left(٣\sqrt{٥} + \sqrt{٧}\right)$

٤) $\left(\sqrt{٣} - \sqrt{٢}\right)^{٢}$

٥) $\left(\sqrt{٣} + \sqrt{٥}\right)^{٢} - \sqrt{٦٠}$

٦) $\sqrt{١٨} - \frac{١٢}{\sqrt{٦}} + \sqrt{٢}\left(٢\sqrt{٣} - ٣\right)$

٦ اكتب كلًا مما يأتي بحيث يكون المقام عددًا صحيحًا :

١) $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$

٢) $\sqrt{\frac{٥}{٣}}$

٣) $\frac{٥\sqrt{٣}}{\sqrt{٥}}$

٤) $\frac{٤\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}{٢\sqrt{٣}}$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $\frac{\sqrt{٦٣}}{\sqrt{٧}} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) ٩ (د) ± ٣

٢) $\sqrt{٨} - \sqrt{٢} =$ ....

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ (د) ١

٣) $\left(\sqrt{٨} + \sqrt{٢}\right)^{٢} =$ ....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) $\sqrt{١٨}$

٤ $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5}) = \dots\dots\dots$

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) $2\sqrt{7}$ (د) $-2\sqrt{5}$

٥ $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

٦ $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٢ (جـ) −٢ (د) ٤

٧ المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{50}$ هو ....

(أ) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (ب) $\frac{-\sqrt{2}}{10}$ (جـ) $-5\sqrt{2}$ (د) $5\sqrt{2}$

٨ إذا كانت : س $= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ فإن : $س^{-1} = \dots\dots\dots$

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (د) $2\sqrt{3}$

٩ إذا كانت : س $= \sqrt{7} + \sqrt{3}$ ، ص $= \sqrt{28} + \sqrt{12}$ فإن : س = ...

(أ) ص (ب) $\frac{1}{2}$ ص (جـ) ٢ ص (د) $ص^2$

٨ أكمل ما يأتى :

١ $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{18}} = \dots\dots\dots$

٢ $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3 \times \dots\dots\dots$

٣ $\frac{1}{2}\sqrt{48} = 2 \times \dots\dots\dots$

٤ إذا كان : $2\sqrt{27} - 2\sqrt{48} =$ س $\sqrt{3}$ فإن : س = ...

٥ $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، .... (بنفس التسلسل)

٦ إذا كانت : $س^٢ = \frac{٨}{٩}$ فإن : س فى أبسط صورة = ...

٧ إذا كانت : $س^٢ = ٥$ فإن : $(س + \sqrt{٥})^٢$ = ... أو ....

٩ أوجد قيمة كل من : س + ص ، س × ص فى كل من الحالات الآتية :

١ س = ٣ + $\sqrt{٥}$ ، ص = ١ − $\sqrt{٥}$ «٤ ، −٢ − ٢$\sqrt{٥}$»

٢ س = $\sqrt{٣}$ − $\sqrt{٢}$ ، ص = $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٢}$ «٢$\sqrt{٣}$ ، ١»

٣ س = ٥ − ٣$\sqrt{٢}$ ، ص = ٥ − ٣$\sqrt{٢}$ «١٠ − ٦$\sqrt{٢}$ ، ٤٣ − ٣٠$\sqrt{٢}$»

١٠ إذا كانت : $س = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$

فأوجد قيمة : ٦ (س + ص) «٥$\sqrt{٦}$»

١١ إذا كانت : $س = \frac{١٠}{\sqrt{٥}}$ ، ص = $\sqrt{٤٥}$ + $\sqrt{٢}$ ، ع = $\sqrt{٨}$ + $\sqrt{٥}$

فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $(س − ص + ع)^٢$ «٢»

١٢ إذا كانت : س = ٢$\sqrt{٥}$ + $\sqrt{٢}$ ، ص = ٢$\sqrt{٥}$ − $\sqrt{٢}$

فأوجد قيمة المقدار : $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$ «٨٠»

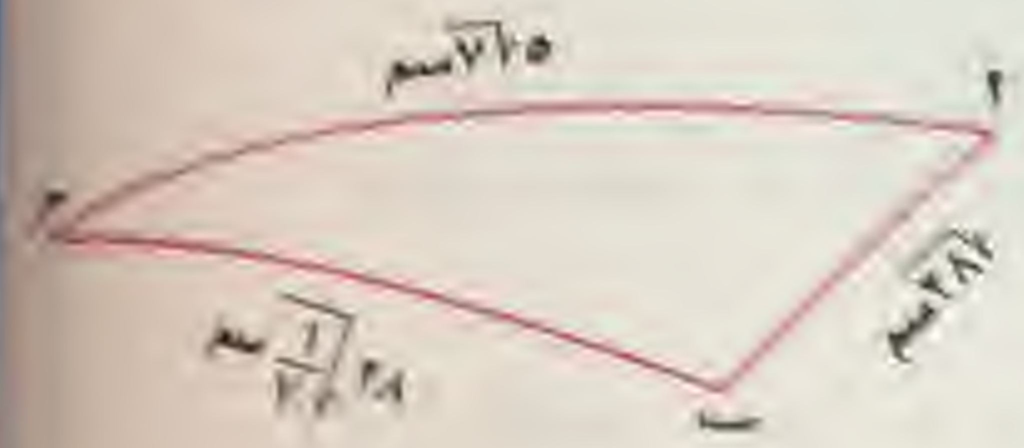
١٣ إذا كانت : س = $\sqrt{٧}$ + $\frac{١}{٢}$$\sqrt{١٢}$ ، ص = $\frac{١}{٣}$$\sqrt{٦٣}$ − $\sqrt{٣}$

أثبت أن : $س^٢ ص^٢ = ١٦$

تطبيقات هندسية

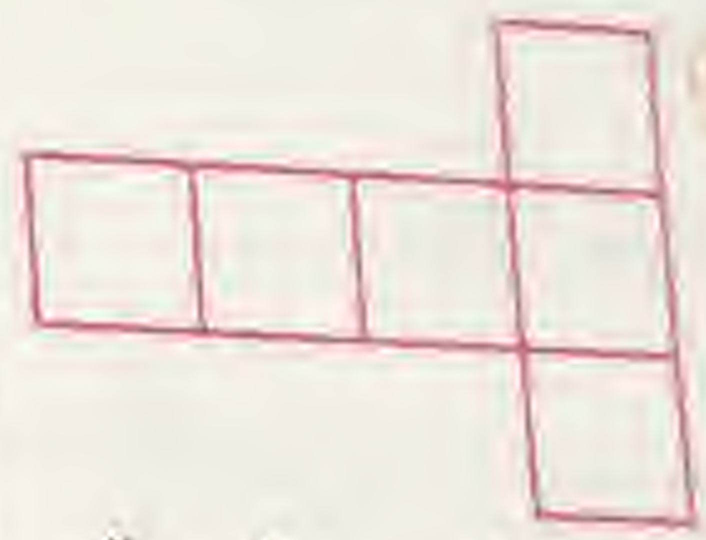
١٤ في الشكل المقابل :

أوجد محيط Δ أب حـ مع وضع الناتج في أبسط صورة.

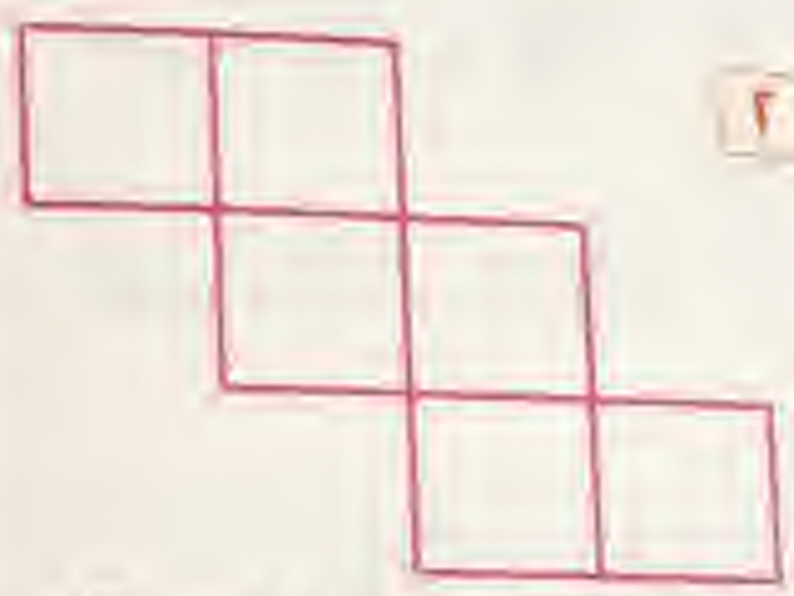


«١١√٧ سم»

١٥ كل من الأشكال التالية يتكون من مربعات متساوية المساحة ، أوجد محيط كل شكل في أبسط صورة إذا علمت مساحته :

[١] 

المساحة = ٣٠٠ سم^2

[٢] 

المساحة = ٧٢ سم^2

[٣] 

المساحة = ٤٠ سم^2

«٧٠ √٢ سم ، ٢٨ √٣ سم ، ٢٤ √٢ سم»

للمتفوقين

١٦ إذا كان : $أ^{س} = ٦$ ، $أ^{-ص} = \sqrt{٣}$ فأوجد قيمة : $أ^{س + ص}$

«٢√٣»

١٧ اختصر كلًا مما يأتي إلى أبسط صورة :

[١] $\dfrac{(\sqrt{٥})^{٣} \times (\sqrt{٥})^{٥}}{(\sqrt{١٠})^{٦}}$ «$\frac{٥}{٨}$»

[٢] $\dfrac{٢\sqrt{٢} \times (\sqrt{٦})^{-٣}}{(\sqrt{٣})^{-٣}}$ «١»

١٨ إذا كان : $\sqrt{٢٧} + ٢\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{١٨} - \sqrt{١٢} - \sqrt{٥٠} = س\sqrt{٢} + ص\sqrt{٣}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص حيث س ، ص عددان نسبيان.

«-١ ، ١»



الدرس 7

العددان المترافقان

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين :

فإن كلاً من العددين : $(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ}-\sqrt{ب})$ يعتبر مرافقًا للعدد الآخر ويكون :

- مجموعهما = $(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})+(\sqrt{أ}-\sqrt{ب})=٢\sqrt{أ}$ = ضعف الحد الأول

- حاصل ضربهما = $(\sqrt{أ}+\sqrt{ب})(\sqrt{أ}-\sqrt{ب})=(\sqrt{أ})^{٢}-(\sqrt{ب})^{٢}=أ-ب$

  مربع الحد الأول − مربع الحد الثانى

فمثلًا : $(\sqrt{٣}-\sqrt{٢})$ مرافقه $(\sqrt{٣}+\sqrt{٢})$ ويكون :

- مجموعهما = $٢\sqrt{٣}$
- حاصل ضربهما = ٣ − ٢ = ١

ملاحظة

حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عدد نسبى.

ملاحظة

إذا كان لدينا عدد حقيقى مقامه على الصورة : $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ أو $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

فإننا نضعه فى أبسط صورة وذلك بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام.

مثال ١

اكتب العدد : $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ فى أبسط صورة.

الحل

بضرب حدى العدد فى مرافق المقام وهو $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})$

$$\therefore \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{٤ (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{(\sqrt{٧})^٢ - (\sqrt{٣})^٢}$$

$$= \frac{٤ (\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$$

مثال ٢

إذا كان : $س = \frac{٤}{٢ - \sqrt{٢}}$ ، $ص = \frac{٣ - ٢\sqrt{٢}}{٣ + ٢\sqrt{٢}}$

فاكتب : كلاً من س ، ص بحيث يكون المقام عدداً نسبياً ، **ثم أوجد :** س + ص

الحل

$$س = \frac{٤}{٢ - \sqrt{٢}} \times \frac{٢ + \sqrt{٢}}{٢ + \sqrt{٢}} = \frac{٤ (٢ + \sqrt{٢})}{٤ - ٢} = \frac{٤ (٢ + \sqrt{٢})}{٢}$$

$$= ٢ (٢ + \sqrt{٢}) = ٤ + ٢\sqrt{٢}$$

$$، ص = \frac{٣ - ٢\sqrt{٢}}{٣ + ٢\sqrt{٢}} \times \frac{٣ - ٢\sqrt{٢}}{٣ - ٢\sqrt{٢}} = \frac{(٣ - ٢\sqrt{٢})^٢}{٩ - ٨} = \frac{٩ - ١٢\sqrt{٢} + ٨}{١} = ١٧ - ١٢\sqrt{٢}$$

$$\therefore س + ص = ٤ + ٢\sqrt{٢} + ١٧ - ١٢\sqrt{٢} = ٢١ - ١٠\sqrt{٢}$$

حاول بنفسك ١

اكتب كلًّا مما يأتى بحيث يكون المقام عددًا نسبيًا :

١ $\frac{١٢}{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}$ ٢ $\frac{\sqrt{٨}}{٣ + ٢\sqrt{٢}}$

ملاحظات هامة من الضرب بمجرد النظر

- نعلم أن : (س − ص) (س + ص) = س^٢ − ص^٢
- كما نعلم أن :

(س + ص)^٢ = س^٢ + ٢ س ص + ص^٢

ومنها :

* س^٢ + س ص + ص^٢ = (س + ص)^٢ − س ص

* س^٢ + ص^٢ = (س + ص)^٢ − ٢ س ص

(س − ص)^٢ = س^٢ − ٢ س ص + ص^٢

ومنها :

* س^٢ − س ص + ص^٢ = (س − ص)^٢ + س ص

* س^٢ + ص^٢ = (س − ص)^٢ + ٢ س ص

مثال ٣

إذا كانت : س = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ فأثبت أن : س ، ص مترافقان.

ثم أوجد قيمة كل من :

١ س^٢ + ٢ س ص + ص^٢

٢ س^٢ + س ص + ص^٢

الحل

$\because$ س = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}} = \frac{٢(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{٥ - ٣} = \frac{٢(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})}{٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$

، $\because$ ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ $\therefore$ س ، ص مترافقان.

١ $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

$= (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})^{٢} + ٢ (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٥ + ٢\sqrt{١٥} + ٣) + ٢(٥ - ٣) + (٥ - ٢\sqrt{١٥} + ٣)$

$= ٨ + ٢\sqrt{١٥} + ٤ + ٨ - ٢\sqrt{١٥} = ٢٠$

• **حل آخر باستخدام الملاحظات السابقة :**

حيث إن : $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

$\therefore س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = [(\sqrt{٥} + \sqrt{٣}) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})]^{٢}$

$= (٢\sqrt{٥})^{٢} = ٤ \times ٥ = ٢٠$

٢ $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})^{٢} + (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣}) + (\sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢}$

$= (٥ + ٣ + ٢\sqrt{١٥}) + (٢) + (٥ + ٣ - ٢\sqrt{١٥}) = ١٨$

• **حل آخر باستخدام الملاحظات السابقة :**

$س^{٢} + س ص + ص^{٢} = (س + ص)^{٢} - س ص$

$= (\sqrt{٥} + \sqrt{٣} + \sqrt{٥} - \sqrt{٣})^{٢} - (\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$

$= (٢\sqrt{٥})^{٢} - ٢ = ٢٠ - ٢ = ١٨$

حاول بنفسك ٢

إذا كان : $س = \frac{٣}{٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}}$ ، $ص = ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}$ فأوجد قيمة : $س^{٢} - ص^{٢}$

تمارين 7

على العددين المترافقين



اختبار تفاعلي

أسئلة كتاب الوزارة

١ اكتب مرافق كل من الأعداد الآتية :

(١) $\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ (٢) $٥ - ٢\sqrt{٧}$ (٣) $\sqrt{٥} + \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

٢ اجعل مقام كل مما يأتي عددًا نسبيًا :

(١) $\frac{٥}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$ (٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٢ - \sqrt{٣}}$ (٣) $\frac{\sqrt{٧} + ٣}{\sqrt{٧} - ٣}$

٣ إذا كانت : $س = \frac{٢}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٥}$

أوجد قيمة : $(س + ص)^٢$

«٢٨»

٤ إذا كانت : $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة : $س^٢ ص^٢$

«١٦»

٥ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ فأثبت أن : $\frac{٤}{س} + ٢ س = ٤\sqrt{٥}$

٦ إذا كانت : $أ = \sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، $ب = \frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة : $أ^٢ - ب^٢$

«$٤\sqrt{٦}$»

٧ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ، $ص = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة : $س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$

«٢٠»

٨ إذا كانت : $س = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ ، $ص = \frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد : $س^٢ - ٢ س ص + ص^٢$

«٨»

٩ إذا كانت: $س = ٣ + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٤}{٣ + \sqrt{٥}}$ أثبت أن: س ، ص مترافقان

ثم أوجد: (١) حاصل ضربهما. (٢) $س^٢ + ص^٢$

١٠ إذا كانت: $س = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

أوجد قيمة: $س^٢ - س ص + ص^٢$

١١ إذا كانت: $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار: $\frac{س + ص}{س ص - ١}$

١٢ إذا كانت: $أ = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ب = \frac{٤}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}$

أوجد قيمة: $\frac{أ - ب}{أ ب}$

١٣ إذا كانت: $س = ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ، $ص = \frac{٥}{\sqrt{٨} - \sqrt{٣}}$

أثبت أن: س ، ص عددان مترافقان واحسب قيمة: $\frac{س + ص}{س ص}$

١٤ إذا كانت: $س = \frac{٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ، $ص = \frac{٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

فأوجد قيمة: (١) $س^٢ + ص^٢$ (٢) س ص

ثم أثبت أن: $س^٢ + ص^٢ = ٣٨ س ص$

١٥ إذا كانت: $س = \frac{١}{٢ + \sqrt{٣}}$ ، $ص = \frac{١٢}{\sqrt{٣}}$

أوجد قيمة المقدار: $س^٢ + ص$

١٦ إذا كانت: $س = \frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ ، ص هى المعكوس الضربى للعدد س

فأوجد: ص ثم أثبت أن: $(س + ص)^٢ = ١٢$

١٧ إذا كانت : $س = \sqrt{١٣} + \sqrt{٦}$ ، $س ص = ١$

فأوجد قيمة : $س^{٢} - ٤٩ ص^{٢}$

«$٤\sqrt{٧٨}$»

١٨ إذا كانت : $س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص^{-١} = \frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة : $س^{٢} ص^{٢}$ «١٦»

> **تذكر أن**
> $ص^{-١} = \frac{١}{ص}$

١٩ إذا كانت : $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $\frac{س + ص}{س ص}$

«$\sqrt{٧}$»

٢٠ إذا كانت : $س = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٥}}{\sqrt{٦} - \sqrt{٥}}$ فأثبت أن : $س + \frac{١}{س} = ٢٢$

٢١ أكمل ما يأتى :

١ $(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})(\sqrt{٧} - \sqrt{٣}) =$ ....

٢ إذا كانت : $س = ٣ + \sqrt{٢}$ فإن مرافقها .... وحاصل ضربهما ....

٣ العدد المرافق للعدد $\frac{١}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}}$ هو ....

٤ مرافق العدد $١ + \frac{٧}{\sqrt{٧}}$ فى أبسط صورة هو ....

٥ المعكوس الضربى للعدد $(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ فى أبسط صورة هو ....

٦ إذا كانت : $س = ٢ + \sqrt{٥}$ ، ص العدد المرافق للعدد س فإن : $(س - ص)^{٢} =$ ....

٧ إذا كان : $\frac{س}{٥ - \sqrt{٥}} = ٥ + \sqrt{٥}$ فإن : قيمة س فى أبسط صورة هى ....

٨ إذا كانت : $\frac{١}{س} = \sqrt{٥} - ٢$ فإن : قيمة س فى أبسط صورة هى ....

٩ إذا كانت : $س = \sqrt{٣} + ٢$ ، $ص = \sqrt{٣} - ٢$ فإن : (س ص ، س + ص) = ...

١٠ $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{-٩} (\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^{-٩} =$ ....

٢٢ في كل مما يأتي إذا كان أ ، ب عددين صحيحين فأوجد قيمة كل منهما :

(١) $\frac{11}{2\sqrt{5}+3} = \text{أ}\sqrt{5} + \text{ب}$

(٢) $\frac{3}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \text{أ}\sqrt{2} + \text{ب}\sqrt{5}$

(٣) $\frac{7}{\sqrt{8}+1} = \text{أ} + \text{ب}\sqrt{2}$

٢٣ اختصر كلًا مما يأتي :

(١) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(٢) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

(٣) $\sqrt{75} - \sqrt[3]{125} + \frac{10}{\sqrt{3}-1}$

تطبيق هندسي

٢٤ أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب :

فإذا كان : أ ب $= (\sqrt{28} + 2)$ سم

، ب ج $= (\sqrt{7} - 1)$ سم فأوجد مساحة Δ أ ب ج

للمتفوقين

٢٥ إذا كانت : $\text{س} = \sqrt{4+\sqrt{7}}$ ، $\text{ص} = \sqrt{4-\sqrt{7}}$

أوجد في أبسط صورة : $(\text{س} + \text{ص})^2$

٢٦ إذا كانت : $\text{س} = \sqrt{5} + 1$ ، $\text{ص} = \sqrt{5} - 1$

فأوجد قيمة : $\text{س}\,\text{ص}^{-1} + \text{ص}\,\text{س}^{-1}$

٢٧ إذا كانت : $\text{س} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$ ، $\text{ص} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$

فأوجد قيمة : $\frac{\text{س}^8\,\text{ص}^9 - \text{ص}}{(\text{س} + \text{ص})^5}$



الدرس **8**

العمليات على الجذور التكعيبية

* إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

١ $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أب}$

فمثلًا :

- $\sqrt[3]{٣} \times \sqrt[3]{٩} = \sqrt[3]{٣ \times ٩} = \sqrt[3]{٢٧} = ٣$
- $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{-٤} = \sqrt[3]{٢ \times (-٤)} = \sqrt[3]{-٨} = -٢$
- $\sqrt[3]{١٦} = \sqrt[3]{٨ \times ٢} = \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٢} = ٢\sqrt[3]{٢}$
- $\sqrt[3]{-٥٤} = \sqrt[3]{-٢٧ \times ٢} = \sqrt[3]{-٢٧} \times \sqrt[3]{٢} = -٣\sqrt[3]{٢}$

٢ $\frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب}}$ (حيث ب $\neq$ ٠)

فمثلًا :

- $\frac{\sqrt[3]{٣٢}}{\sqrt[3]{٤}} = \sqrt[3]{\frac{٣٢}{٤}} = \sqrt[3]{٨} = ٢$
- $\frac{\sqrt[3]{٥٤}}{\sqrt[3]{-٢}} = \sqrt[3]{-\frac{٥٤}{٢}} = \sqrt[3]{-٢٧} = -٣$
- $\sqrt[3]{\frac{٨}{١٢٥}} = \frac{\sqrt[3]{٨}}{\sqrt[3]{١٢٥}} = \frac{٢}{٥}$
- $\sqrt[3]{-\frac{٢٧}{٦٤}} = \frac{\sqrt[3]{-٢٧}}{\sqrt[3]{٦٤}} = -\frac{٣}{٤}$

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١) $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt[٣]{\frac{٤}{٩}}$ ٢) $\sqrt[٣]{\frac{٥}{٤}} \div \sqrt[٣]{\frac{٢}{٢٥}}$

الحل

١) $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt[٣]{\frac{٤}{٩}} = \sqrt[٣]{\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٩}} = \sqrt[٣]{\frac{٨}{٢٧}} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{٢٧}} = \frac{٢}{٣}$

٢) $\sqrt[٣]{\frac{٥}{٤}} \div \sqrt[٣]{\frac{٢}{٢٥}} = \sqrt[٣]{\frac{٥}{٤} \div \frac{٢}{٢٥}} = \sqrt[٣]{\frac{٥}{٤} \times \frac{٢٥}{٢}} = \sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٨}} = \frac{\sqrt[٣]{١٢٥}}{\sqrt[٣]{٨}} = \frac{٥}{٢}$

ملاحظات

* إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

١) $\sqrt[٣]{أ^٣ + ب^٣} \neq أ + ب$ ، $\sqrt[٣]{أ^٣ - ب^٣} \neq أ - ب$

٢) $\sqrt[٣]{-أ} = -\sqrt[٣]{أ}$

٣) $أ\sqrt[٣]{ب} = \sqrt[٣]{أ^٣ ب}$

فمثلًا : • $٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}} = \sqrt[٣]{٢٧ \times \frac{١}{٩}} = \sqrt[٣]{٣}$

• $٨\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}} = ٤ \times ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}} = ٤\sqrt[٣]{٨ \times \frac{١}{٤}} = ٤\sqrt[٣]{٢}$

٤) $\sqrt[٣]{\frac{أ}{ب}} = \sqrt[٣]{\frac{أ}{ب} \times \frac{ب^٢}{ب^٢}} = \sqrt[٣]{\frac{أب^٢}{ب^٣}} = \frac{١}{ب}\sqrt[٣]{أب^٢}$ (حيث : ب $\neq$ ٠)

فمثلًا : $\sqrt[٣]{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٣} \times \frac{٩}{٩}} = \sqrt[٣]{\frac{٩}{٢٧}} = \frac{١}{٣}\sqrt[٣]{٩}$

مثال ٢

اختصر كلًا مما يأتى إلى أبسط صورة :

١) $\sqrt[٣]{٢٤} + \sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٨١}$

٢) $\sqrt[٣]{٥٤} + ٦\sqrt[٣]{١٦} - ٦\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

٣) $\sqrt[٣]{٨١} + \sqrt[٣]{١٢} - ٢\sqrt[٣]{٣} - ٢\sqrt{٣}$

الحـــل

١

$$\sqrt[3]{٢٤} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٨١} = \sqrt[3]{٨ \times ٣} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٢٧ \times ٣}$$

$$= \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٣} + \sqrt[3]{٣} - \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٣}$$

$$= ٢\sqrt[3]{٣} + \sqrt[3]{٣} - ٣\sqrt[3]{٣} = \text{صفر}$$

٢

$$\sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{٢٧ \times ٢} + ٦\sqrt[3]{٨ \times ٢} - ٣ \times ٢\sqrt[3]{\frac{١}{٤}}$$

$$= \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٢} + ٦ \times \sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{٢} - ٣ \times \sqrt[3]{٨ \times \frac{١}{٤}}$$

$$= ٣ \times \sqrt[3]{٢} + ٦ \times ٢ \times \sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٢} + ١٢\sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢} = ١٢\sqrt[3]{٢}$$

حل آخر :

$$\because \sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{\frac{١}{٤} \times \frac{١٦}{١٦}} = \sqrt[3]{\frac{١٦}{٦٤}} = \frac{\sqrt[3]{١٦}}{\sqrt[3]{٦٤}} = \frac{١}{٤}\sqrt[3]{١٦}$$

$$= \frac{١}{٤}\sqrt[3]{٨ \times ٢} = \frac{١}{٤} \times ٢\sqrt[3]{٢} = \frac{١}{٢}\sqrt[3]{٢}$$

$$\therefore \sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = ٣\sqrt[3]{٢} + ٦ \times ٢\sqrt[3]{٢} - ٦ \times \frac{١}{٢}\sqrt[3]{٢}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٢} + ١٢\sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢} = ١٢\sqrt[3]{٢}$$

حل ثالث :

$$\because \sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = \sqrt[3]{\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٢}} = \sqrt[3]{\frac{٢}{٨}} = \frac{\sqrt[3]{٢}}{\sqrt[3]{٨}} = \frac{\sqrt[3]{٢}}{٢}$$

$$\therefore \sqrt[3]{٥٤} + ٦\sqrt[3]{١٦} - ٦\sqrt[3]{\frac{١}{٤}} = ٣\sqrt[3]{٢} + ١٢\sqrt[3]{٢} - ٦ \times \frac{\sqrt[3]{٢}}{٢}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٢} + ١٢\sqrt[3]{٢} - ٣\sqrt[3]{٢} = ١٢\sqrt[3]{٢}$$

٣

$$\sqrt[3]{٨١} + \sqrt{١٢} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣} = \sqrt[3]{٢٧ \times ٣} + \sqrt{٤ \times ٣} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣}$$

$$= \sqrt[3]{٢٧} \times \sqrt[3]{٣} + \sqrt{٤} \times \sqrt{٣} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣}$$

$$= ٣\sqrt[3]{٣} + ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt{٣} = \sqrt[3]{٣}$$

مثال ٣

أوجد ناتج ما يأتي في أبسط صورة : $٢\sqrt[3]{٤}\left(٥\sqrt[3]{\frac{١}{٢}} - \sqrt[3]{٣٢}\right)$

الحل

$٢\sqrt[3]{٤}\left(٥\sqrt[3]{\frac{١}{٢}} - \sqrt[3]{٣٢}\right) = ٢ \times ٥ \times \sqrt[3]{٤ \times \frac{١}{٢}} - ٢ \times \sqrt[3]{٤ \times ٣٢}$

$= ١٠\sqrt[3]{٢} - ٢\sqrt[3]{١٢٨} = ١٠\sqrt[3]{٢} - ٢\sqrt[3]{٦٤ \times ٢}$

$= ١٠\sqrt[3]{٢} - ٢ \times ٤\sqrt[3]{٢} = ١٠\sqrt[3]{٢} - ٨\sqrt[3]{٢} = ٢\sqrt[3]{٢}$

مثال ٤

إذا كانت : $س = \sqrt[3]{٥} + ٢$ ، $ص = \sqrt[3]{٥} - ٢$

فأوجد قيمة : $(س + ص)^٣ - (س - ص)^٣$

الحل

$\because س + ص = \sqrt[3]{٥} + ٢ + \sqrt[3]{٥} - ٢ = ٢\sqrt[3]{٥}$

، $س - ص = \sqrt[3]{٥} + ٢ - \left(\sqrt[3]{٥} - ٢\right) = \sqrt[3]{٥} + ٢ - \sqrt[3]{٥} + ٢ = ٤$

$\therefore (س + ص)^٣ - (س - ص)^٣ = \left(٢\sqrt[3]{٥}\right)^٣ - (٤)^٣$

$= ٢^٣ \times \left(\sqrt[3]{٥}\right)^٣ - (٤)^٣$

$= ٨ \times ٥ - ٦٤ = ٤٠ - ٦٤ = -٢٤$

حاول بنفسك

اختصر كلًا مما يأتي إلى أبسط صورة :

١) $٥\sqrt[3]{٢} - \sqrt[3]{١٦} + \sqrt[3]{-٥٤}$

٢) $\sqrt[3]{٧٢} + ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣}} + \sqrt[3]{-٩}$

تمارين 8
على العمليات على الجذور التكعيبية



اختبار تفاعلي

أسئلة كتاب الوزارة

١ ضع كلًّا مما يأتى على صورة $أ\sqrt[3]{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة موجبة ممكنة :

١) $\sqrt[3]{١٦}$ ٢) $\sqrt[3]{-٥٤}$ ٣) $٢\sqrt[3]{٢٥٠}$

٤) $\frac{٢}{٣}\sqrt[3]{-١٣٥}$ ٥) $٣\sqrt[3]{\frac{١}{٣}}$ ٦) $-١٠\sqrt[3]{\frac{٢}{٥}}$

٢ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١) $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣٢}$ ٢) $\frac{\sqrt[3]{٧٢}}{\sqrt[3]{٩}}$ ٣) $\frac{٤\sqrt[3]{-٥٤}}{٢\sqrt[3]{-٢}}$

٤) $\frac{١}{٢}\sqrt[3]{١٠} \times ٦\sqrt[3]{١٠٠}$ ٥) $\sqrt[3]{\frac{٢}{٥}} \times \sqrt[3]{\frac{٤}{٢٥}}$ ٦) $\sqrt[3]{\frac{٣}{٤}} \div \sqrt[3]{\frac{٢}{٩}}$

٣ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١) $\sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢}$ «$\sqrt[3]{٢}$»

٢) $\sqrt[3]{١٢٥} - \sqrt[3]{٢٤}$ «$٥ - ٢\sqrt[3]{٣}$»

٣) $\sqrt[3]{٨١} + \sqrt[3]{-٢٤}$ «$\sqrt[3]{٣}$»

٤) $\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢٥٠}$ «صفر»

٥) $٢\sqrt[3]{٥٤} - ٥\sqrt[3]{٢} + \sqrt[3]{١٦}$ «$٣\sqrt[3]{٢}$»

٦) $\sqrt[3]{١٦} - \frac{١}{٣}\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{-٢}$ «صفر»

٧) $\sqrt[3]{١٦} + \sqrt[3]{١٠} \times \sqrt[3]{٢٥}$ «$٧\sqrt[3]{٢}$»

٨) $\sqrt[3]{٢٤} - ٦\sqrt[3]{١٣\frac{٨}{٩}}$ «$-٨\sqrt[3]{٣}$»

٤ أثبت أن :

١) $\sqrt[3]{١٢٨} + \sqrt[3]{١٦} - ٢\sqrt[3]{٥٤} =$ صفر

٢) $\sqrt[3]{٥٤} \times \sqrt[3]{١٦} \div (\sqrt[3]{٤} \times ٦) = ١$

٥ اختصر كلًّا مما يأتى إلى أبسط صورة :

١) $\sqrt[3]{٨١} + \sqrt[3]{-٢٤} - ٣\sqrt[3]{\frac{١}{٩}}$ «صفر»

٢) $\sqrt[3]{٥٤} + ٨\sqrt[3]{-\frac{١}{٤}} + ٥\sqrt[3]{١٦}$ «$٩\sqrt[3]{٢}$»

٣) $\sqrt[٣]{١٠٨} - ٢\sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٣]{\frac{١}{٢}}$

٤) $\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٤} \times \sqrt[٣]{٦} + ٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}}$

٦ اختصر كلًا مما يأتي إلى أبسط صورة :

١) $\frac{٧}{٣}\sqrt{١٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - ٧\sqrt{٢} + \sqrt[٣]{١٦}$

٢) $\sqrt{٢٧} + \frac{١}{٣}\sqrt[٣]{٢٧} - ٩\sqrt{\frac{١}{٣}} - ١$

٣) $\sqrt[٣]{-١٦} + \frac{١٤}{\sqrt{٧}} - \sqrt{٢٨} + \sqrt[٣]{٥٤}$

٤) $\sqrt{١٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - \frac{\sqrt{٢١٦}}{\sqrt{١٢}} - \sqrt[٣]{١٦}$

٥) $٥\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٠٠} + (\sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٢٥})$

٧ اختصر ما يأتي إلى أبسط صورة : $٢\sqrt[٣]{١٦}\ (٣\sqrt[٣]{٤} + ٥\sqrt[٣]{٣٢} - ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}})$

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{-٢} =$ ....

(أ) $\sqrt[٣]{٥٢}$ (ب) $\sqrt[٣]{٢}$ (جـ) $٢\sqrt[٣]{٢}$ (د) $٤\sqrt[٣]{٢}$

٢) $\sqrt[٣]{-٦٤} + \sqrt{١٦} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ±٨

٣) $\frac{\sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٢}} =$ ....

(أ) ٨ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) $٢\sqrt[٣]{٢}$

٤) $\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢} =$ ....

(أ) $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) $\sqrt[٣]{٤}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٨}$ (د) $\sqrt[٣]{١٦}$

٥) $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٩}} =$ ....

(أ) $\frac{\sqrt[٣]{٦}}{٣}$ (ب) $\sqrt[٣]{\frac{١}{٦}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{٦}$ (د) $\sqrt[٣]{٢}$

٩ أكمل ما يأتى :

١) $\sqrt[٣]{\frac{٢}{٣}} \times \sqrt[٣]{-١٢} = $ ....

٢) $\sqrt[٣]{٣} \times \sqrt[٣]{٩} = \sqrt{............}$

٣) $\sqrt[٣]{٥٤} - \sqrt[٣]{-١٦} = \sqrt[٣]{............}$

٤) $\frac{١}{٢}\sqrt[٣]{٥٦} - \sqrt[٣]{\frac{٧}{٢٧}} = $ ....

٥) إذا كانت : $\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = \sqrt[٣]{-١٦}$ فإن : $\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٣} = $ ....

٦) $\frac{\sqrt[٣]{٢٥٠} - \sqrt[٣]{١٦}}{\sqrt[٣]{٥٤}} = $ ....

---

١٠ إذا كانت : $\text{أ} = \sqrt[٣]{٥} + ١$ ، $\text{ب} = \sqrt[٣]{٥} - ١$

احسب قيمة كل من :

١) $(\text{أ} - \text{ب})^{٥}$

٢) $(\text{أ} + \text{ب})^{٣}$

«٣٢ ، ٤٠»

---

١١ إذا كانت : $\text{س} = ٣ + \sqrt[٣]{٦}$ ، $\text{ص} = ٣ - \sqrt[٣]{٦}$

فأوجد قيمة : $\left(\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}}\right)^{٣}$

«$\frac{٢}{٩}$»

---

١٢ أوجد ناتج ما يأتى فى أبسط صورة :

$\sqrt[٣]{٣٢} + ٤\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} - (٢\sqrt[٣]{-٢})^{٢} + (\sqrt[٣]{٢})^{\text{صفر}} - \left(\frac{٢}{\sqrt[٣]{٢}}\right)^{٢}$

«-١»

تطبيق حياتى

١٣ الشكل المقابل يمثل عددًا من الصناديق كل منهم على شكل مكعب حجمه ٢٤ ديسيمتر مكعب

فاحسب مساحة الأرض المستخدمة فى وضع الصناديق.



«$٢٠\sqrt[٣]{٩}$ ديسم^{٢}»

للمتفوقين

١٤ إذا كانت : $\text{س} = \sqrt[٣]{٢} + ١$ ، $\text{ص} = \sqrt[٣]{٢} - ١$ فأثبت أن : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢\sqrt[٣]{٤} + ٢$

---

١٥ اجعل مقام ما يأتى عددًا نسبيًا : $\frac{٢}{\sqrt[٣]{٢}}$



الدرس

9

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

المكعب



هو مجسم جميع أوجهه الستة عبارة عن مربعات متطابقة

أى أن جميع أحرفه متساوية فى الطول.

وبفرض أن طول حرف المكعب = ل وحدة طولية فإن :

1. مساحة كل وجه = $ل^{٢}$ وحدة مربعة.
2. مساحته الجانبية = ٤ $ل^{٢}$ وحدة مربعة.
3. مساحته الكلية (مساحة أوجهه الستة) = ٦ $ل^{٢}$ وحدة مربعة.
4. حجمه = $ل^{٣}$ وحدة مكعبة.

مثال ١

مكعب حجمه ١٢٥ $سم^{٣}$. أوجد مساحته الكلية ، مساحته الجانبية.

الحل

بفرض أن طول حرف المكعب = ل سم ∴ حجمه = $ل^{٣}$ $سم^{٣}$

∴ $ل^{٣}$ = ١٢٥

∴ ل = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥ سم

∴ مساحة المكعب الكلية = ٦ $ل^{٢}$ = ٦ × $(٥)^{٢}$ = ١٥٠ $سم^{٢}$

، مساحته الجانبية = ٤ $ل^{٢}$ = ٤ × $(٥)^{٢}$ = ١٠٠ $سم^{٢}$

حاول بنفسك ١

أكمل الجدول التالى :

	طول حرف المكعب	مساحة الوجه الواحد	مساحته الجانبية	مساحته الكلية	الحجم
١	٣ سم	....	....	....	....
٢	....	٤٩ سم²	....	....	....
٣	....	....	١٤٤ سم²	....	....
٤	....	....	....	١٥٠ سم²	....
٥	....	....	....	....	٦٤ سم³

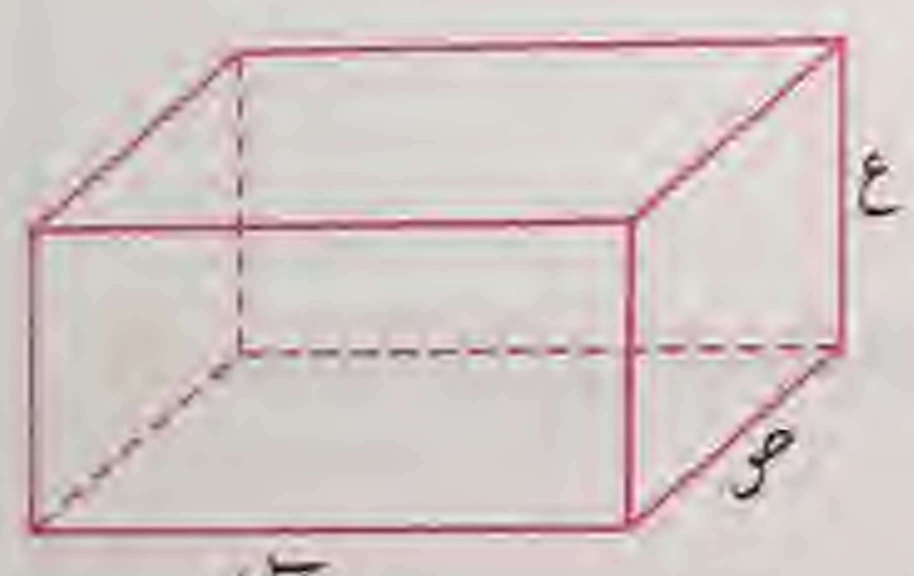
متوازى المستطيلات

هو مجسم يحتوى على ستة أوجه مستطيلة

وكل وجهين متقابلين منها متطابقان.

ويفرض أن أطوال أحرف متوازى المستطيلات

هى س ، ص ، ع وحدة طولية فإن :



١ مساحته الجانبية = محيط قاعدته × ارتفاعه = ٢ (س + ص) × ع وحدة مربعة.

٢ مساحته الكلية (مساحة أوجهه الستة) = مساحته الجانبية + ضعف مساحة قاعدته

= ٢ (س + ص) × ع + ٢ س ص

= ٢ (س ص + ص ع + ع س) وحدة مربعة.

٣ حجمه = مساحة قاعدته × ارتفاعه = س × ص × ع وحدة مكعبة.

ملاحظات

- قد يحتوى متوازى المستطيلات على وجهين متقابلين كل منهما عبارة عن مربع.
- المكعب هو حالة خاصة من متوازى المستطيلات ،

فهو متوازى مستطيلات أطوال أحرفه متساوية.

مثال ٢

متوازى مستطيلات ارتفاعه ٤ سم وقاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها ٥ سم أوجد :

١ حجمه. ٢ مساحته الجانبية.

٣ مساحته الكلية.

الحل

١ حجم متوازى المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٥ × ٥ × ٤ = ١٠٠ سم^3

٢ مساحة متوازى المستطيلات الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٤ × ٥ × ٤ = ٨٠ سم^2

٣ مساحة متوازى المستطيلات الكلية = المساحة الجانبية + ضعف مساحة قاعدته

= ٨٠ + ٢ × ٢٥ = ١٣٠ سم^2

حاول بنفسك ٢

متوازى مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم

احسب حجمه ومساحته الكلية.

الدائــــــرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق فإن :

1. محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طولية.
2. مساحة الدائرة = π نق^{٢} وحدة مربعة.



مثال ٣

دائرة مساحتها ٢٥ π سم^{٢}. احسب محيطها بدلالة π

الحــل

∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢} ∴ π نق^{٢} = ٢٥ π

∴ نق^{٢} = ٢٥ ∴ نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٥ × π = ١٠ π سم

مثال ٤



في الشكل المقابل :

دائرة م مرسومة داخل مربع فإذا كانت مساحة المربع ١٩٦ سم^{٢}

فأوجد :

1. مساحة الجزء المظلل.
2. محيط الجزء المظلل.

الحــل

∵ مساحة المربع = ١٩٦ سم^{٢} ∴ طول ضلع المربع = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

∵ طول ضلع المربع = ٢ نق ∴ ١٤ = ٢ نق ∴ نق = ٧ سم

١ مساحة الجزء المظلل = (مساحة المربع − مساحة الدائرة) ÷ ٤

= (١٩٦ − $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ٧) ÷ ٤ = ٤٢ ÷ ٤ = ١٠,٥ سم²

٢ محيط الجزء المظلل = ب هـ + ب ل + $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة

= ٧ + ٧ + ($\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧) = ١٤ + ١١ = ٢٥ سم

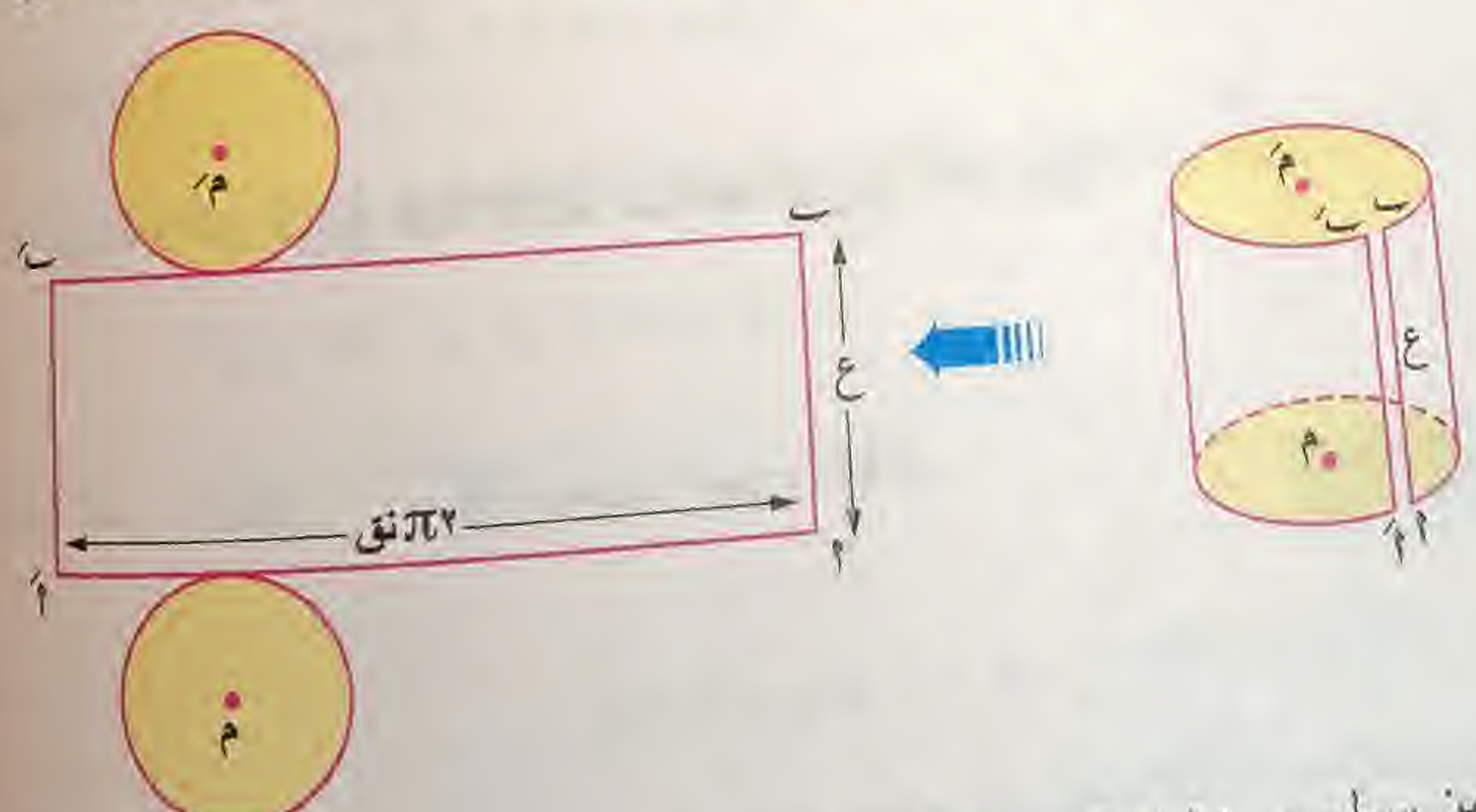
حاول بنفسك ٣

دائرة محيطها ٨٨ سم ، أوجد مساحتها. (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

الأسطوانة الدائرية القائمة



- هى مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما عبارة عن سطح دائرة مستوى ، أما السطح الجانبى فهو سطح منحنٍ يسمى سطح أسطوانى.
- والقطعة المستقيمة $\overline{مَم}$ المرسومة بين مركزى القاعدتين تكون عمودية على مستوى كل من القاعدتين وتُسمى ارتفاع الأسطوانة.
- إذا رسمنا $\overline{أب}$ على السطح الأسطوانى بحيث أ ∈ الدائرة م ، ب ∈ الدائرة مَ ، $\overline{أب}$ // $\overline{مَم}$ وقطعنا سطح الأسطوانة الجانبى عند $\overline{أب}$ وفردناها فإننا نحصل على الشكل الآتى :



وهو يتكون من سطح مستطيل أ ب بَ أَ وهو نفس السطح الأسطوانى ، بالإضافة إلى سطحى دائرتين هما قاعدتا الأسطوانة ويكون : أب = ارتفاع الأسطوانة ، أأَ = محيط قاعدة الأسطوانة

∴ المساحة الجانبية للأسطوانة = مساحة المستطيل أ ب ب َ أ َ

= أ أ َ × أ ب = محيط قاعدة الأسطوانة × ارتفاعها

وإذا فرضنا أن : طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق ، ارتفاعها = ع فإن :

١ المساحة الجانبية للأسطوانة = ٢ π نق ع وحدة مربعة.

٢ المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية للأسطوانة + ضعف مساحة القاعدة

= ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} وحدة مربعة.

٣ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق^{٢} ع وحدة مكعبة.

مثال ٥

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم ، وحجمها ١٥٤٠ سم^{٣} أوجد مساحتها الكلية ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ حجم الأسطوانة = π نق^{٢} ع

∴ ١٥٤٠ = $\frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} × ١٠

∴ ١٥٤٠ = $\frac{٢٢٠}{٧}$ نق^{٢}

∴ نق^{٢} = ١٥٤٠ × $\frac{٧}{٢٢٠}$ = ٤٩

∴ نق = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ سم

∴ المساحة الكلية للأسطوانة = ٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ١٠ + ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧^{٢}

= ٤٤٠ + ٣٠٨ = ٧٤٨ سم^{٢}

حاول بنفسك ٤

أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم^{٣} وارتفاعها ١٠ سم أوجد طول قطر قاعدتها.

الكــــرة



- هى مجسم سطحه منحنى وجميع نقاط سطحه على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة داخل الكرة.
  - تسمى هذه الأبعاد المتساوية : طول نصف قطر الكرة.
  - تسمى النقطة الثابتة : مركز الكرة.
- إذا قُطعت الكرة بمستوى مار بمركزها فإن المقطع الناتج يكون عبارة عن دائرة مركزها مركز الكرة وطول نصف قطرها هو طول نصف قطر الكرة.

وبفرض أن طول نصف قطر الكرة = نق فإن :

1. مساحة الكرة = ٤ π نق^{٢} وحدة مربعة.
2. حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} وحدة مكعبة.

مثال ٦

كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}$ π سم^{٣} ، أوجد طول قطرها.

الحل

$\because$ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣} $\therefore$ $\frac{٥٠٠}{٣}$ π = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\therefore$ نق^{٣} = $\frac{٥٠٠}{٣}$ × $\frac{٣}{٤}$ = ١٢٥ $\therefore$ نق = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥ سم

$\therefore$ طول قطر الكرة = ٢ × ٥ = ١٠ سم

مثال ٧

أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٦ سم وحجمها $\frac{٢}{٣}$ حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم.
أوجد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة.

الحـــل

بفرض أن : طول نصف قطر الكرة $نق_1$ سم ، طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة $نق_2$ سم

، ∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π $نق_1^٣$ = $\frac{٤}{٣}$ π × $٣^٣$ = ٣٦ π $سم^٣$

، ∵ حجم الأسطوانة = $\frac{٢}{٣}$ حجم الكرة

∴ π $نق_2^٢$ ع = $\frac{٢}{٣}$ × ٣٦ π

∴ $نق_2^٢$ × ٦ = ٢٤

∴ $نق_2^٢$ = ٤

∴ $نق_2$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ سم

∴ طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = ٢ سم

حاول بنفسك ٥

كرة مساحتها ٣٦ π $سم^٢$ أوجد حجمها بدلالة π

إجابات حاول بنفسك

١
① ٩ $سم^٢$ ، ٣٦ $سم^٢$ ، ٥٤ $سم^٢$ ، ٢٧ $سم^٣$
② ٧ سم ، ١٩٦ $سم^٢$ ، ٢٩٤ $سم^٢$ ، ٣٤٣ $سم^٣$
③ ٦ سم ، ٣٦ $سم^٢$ ، ٢١٦ $سم^٢$ ، ٢١٦ $سم^٣$
④ ٥ سم ، ٢٥ $سم^٢$ ، ١٠٠ $سم^٢$ ، ١٢٥ $سم^٣$
⑤ ٤ سم ، ١٦ $سم^٢$ ، ٦٤ $سم^٢$ ، ٩٦ $سم^٢$

٢ الحجم = ٦٠ $سم^٣$ ، المساحة الكلية = ٩٤ $سم^٢$

٣ ٦١٦ $سم^٢$

٤ ٦ سم

٥ ٣٦ π $سم^٣$



تمارين 9

تطبيقات على الأعداد الحقيقية

أسئلة كتاب الوزارة

المكعب

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان طول حرف مكعب ٥ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

٢ مكعب طول حرفه ٤ سم فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

٣ المساحة الجانبية لمكعب طول ضلعه ل سم = ... سم^{٢}

٤ مكعب حجمه ل^{٣} سم^{٣} فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

٥ المكعب الذى طول ضلعه = ٢ ل سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

---

٢ مكعب مساحته الجانبية ٣٦ سم^{٢} أوجد :

١ مساحته الكلية. ٢ حجمه.

٥٤٠ سم^{٢} ، ٢١٦ سـ

---

٣ مكعب محيط أحد أوجهه ١٢ سم أوجد :

١ حجمه. ٢ مساحته الجانبية.

٢٧٠ سم^{٢} ، ٣٦٠ سـ

---

٤ مكعب مجموع أطوال أحرفه ٦٠ سم أوجد :

١ حجمه. ٢ مساحته الكلية.

١٢٥٠ سم^{٢} ، ١٠٠ سـ

---

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مكعب حجمه ١ سم^{٣} فإن مجموع أطوال أحرفه = ... سم

(أ) ١ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٢

٢ مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣} فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦٤ (د) ٩٦

٣ إذا كانت المساحة الكلية لمكعب = ٩٦ سم^{٢} فإن مساحة الوجه الواحد = ...

(أ) ١٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

٤ إذا كانت مساحة الأوجه الستة لمكعب = ٥٤ سم^{٢} فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ٥٤ (ب) ٤٤ (جـ) ٧٢ (د) ٢٧

٥ إذا كان حجم مكعب = ٦٤ سم^{٣} فإن طول قطر وجه فيه = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٢ (د) ٦٤

٦ مكعب حجمه ٥ سم^{٣} إذا ضُوعف طول حرفه فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ٤٠

٧ مكعب حجمه ٢ $\sqrt{٢}$ سم^{٣} فإن طول حرفه = ... سم

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ١٫٥

متوازى المستطيلات

٦ متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ٩ سم ، ١٠ سم ، وارتفاعه ٥ سم أوجد :

١ حجمه. ٢ مساحته الجانبية.

٣ مساحته الكلية.

«٤٥٠ سم^{٣} ، ١٩٠ سم^{٢} ، ٣٧٠ سم^{٢}»

٧ متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم أوجد حجمه.

«٦ سم^{٣}»

٨ متوازى مستطيلات بُعدا قاعدته $(\sqrt{٣})$ سم ، $(\sqrt{٣} - ١)$ سم ،

وارتفاعه $(٣ + \sqrt{٣})$ سم احسب حجمه.

«٦ سم^{٣}»

٩ متوازى مستطيلات مساحته الجانبية ٤٨٠ سم^{٢} ، وقاعدته على شكل مربع طول ضلعه ١٠ سم

احسب ارتفاعه.

«١٢ سم»

١٠ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل فإذا كان حجمه ٧٢٠ سم^{٣} وارتفاعه ٥ سم

أوجد مساحته الكلية.

«٥٢٨ سم^{٢}»

١١ أيهما أكبر حجمًا :

مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^{٢} أم متوازى مستطيلات أبعاده ٧ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ٥ سم ؟



١٢ في الشكل المقابل :
قطعة من الورق المقوى مستطيلة الشكل بعداها ٢٥ سم ، ١٥ سم قُطع من كل ركن من أركانها الأربعة مربع طول ضلعه ٤ سم ثم طويت الأجزاء البارزة لتكون حوضًا على شكل متوازي مستطيلات أوجد حجمه ومساحته الكلية.

٤٧٦٠ سم³ ، ٣١١٠ سم

الدائـــرة
($\pi = \frac{٢٢}{٧}$ ما لم يذكر خلاف ذلك)

١٣ دائرة طول نصف قطرها ١٠.٥ سم ، أوجد كلًا من محيطها ومساحتها.

٦٦٠ سم ، ٣٤٦.٥ سم

١٤ دائرة مساحتها ١٥٤ سم² ، أوجد محيطها وطول قطرها.

٤٤٠ سم ، ١٤ سم

١٥ دائرة مساحتها ٦٤ π سم² ، أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيطها لأقرب عدد صحيح. ($\pi = ٣,١٤$)

٨٠ سم ، ٥٠

١٦ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قطر نصف الدائرة فإذا كانت مساحة هذه المنطقة ١٢,٣٢ سم²
أوجد محيط الشكل.

١٧ في الشكل المقابل :



دائرتان متحدتان في المركز م
طولا نصفي قطريهما ٣ سم ، ٥ سم
أوجد مساحة الجزء المظلل بدلالة π

١٨ ف الشكل المقابل :



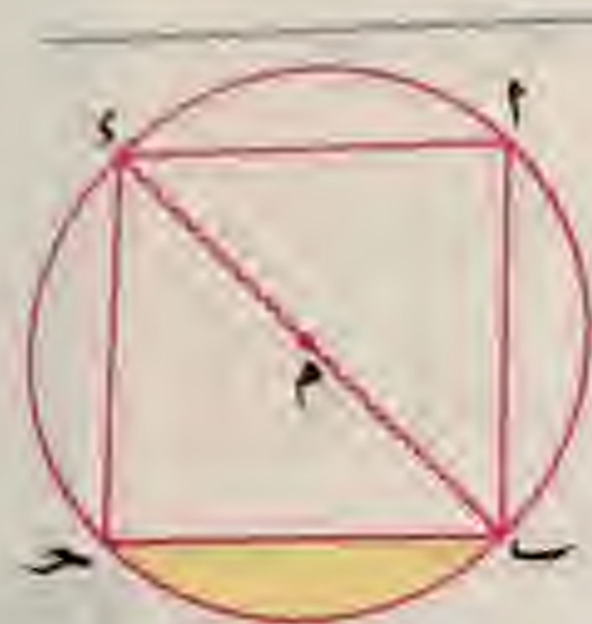
الدائرة م مرسومة داخل المربع أ ب حـ ء

، فإذا كانت مساحة الجزء المظلل $١٠ \frac{٥}{٧}$ سم²

أوجد محيط هذا الجزء $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

« $٣٥ \frac{٥}{٧}$ سم»

١٩ في الشكل المقابل :



الدائرة م تمر برؤوس المربع أ ب حـ ء

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٧ سم

فأوجد مساحة المنطقة المظللة ومحيطها.

«١٤ سم² ، $(١١ + ٧\sqrt{٢})$ سم»

الأسطوانة الدائرية القائمة $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ ما لم يذكر خلاف ذلك

٢٠ أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها ٢٠ سم

أوجد حجمها ومساحتها الكلية. «١٢٣٢٠ سم³ ، ٢٩٩٢ سم²»

٢١ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٢٤ سم³ ، وارتفاعها ٦ سم

أوجد مساحتها الجانبية. «٢٦٤ سم²»

٢٢ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم³ ، وارتفاعها ٢٤ سم

أوجد مساحتها الكلية. $(\pi = ٣,١٤)$ «٢١٣٥,٢ سم²»

٢٣ **أيهما أكبر حجمًا :** أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧ سم وارتفاعها ١٠ سم ، أم مكعب طول حرفه ١١ سم ؟

٢٤ أكمل ما يأتي :

(١) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها نق سم وارتفاعها ع سم فإن مساحتها الجانبية .... وحجمها ....

(٢) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٤٠ π سم^3 وارتفاعها ١٠ سم ، يكون طول نصف قطر قاعدتها ....

(٣) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٥٠٠ π سم^3 وطول نصف قطر قاعدتها ٥ سم فإن ارتفاعها = ...

(٤) أسطوانة دائرية قائمة حجمها π نق^3 سم^3 فإن ارتفاعها يساوى ....

(٥) إذا كانت المساحة الجانبية لأسطوانة قائمة = ٢ π نق^2 سم^2 فإن ارتفاعها = ...

٢٥ أسطوانة دائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤ سم وارتفاعها ٢٥ سم أوجد حجمها.

٢٦ أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٥٢ سم^2 وطول قطر قاعدتها ٨ سم أوجد حجمها.

٢٧ إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها أوجد ارتفاع الأسطوانة علمًا بأن حجمها ٧٢ π سم^3

٢٨ فى الشكل المقابل :



خزان على شكل متوازى مستطيلات أبعاده ٧ م ، ٧ م ، ١٤ م والجزء العلوى منه على شكل نصف أسطوانة دائرية قائمة احسب حجم الخزان بالمتر المكعب.

٢٩ قطعة من الورق على شكل مستطيل أ ب حـ ء ، فيه : أ ب = ١٠ سم ، ب حـ ... ، طُويت على شكل أسطوانة دائرية قائمة ، بحيث ينطبق $\overline{أ ب}$ على $\overline{حـ ء}$ أوجد حجم الأسطوانة الناتجة.

الكـــرة ($\pi = \frac{22}{7}$ ما لم يذكر خلاف ذلك)

٣٠ أوجد الحجم ومساحة السطح لكرة طول قطرها ٤,٢ سم «٣٨,٨٠٨ سم^3 ، ٥٥,٤٤ سم^2»

٣١ كرة حجمها ٤١٨٨ سم^3 أوجد طول نصف قطرها. (π = ٣,١٤١) «١٠ سم»

٣٢ كرة حجمها ٥٦٢,٥ π سم^3 أوجد مساحة سطحها بدلالة π «٢٢٥ π سم^2»

٣٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) حجم الكرة يساوى ....

(أ) ٤ π نق^2 (ب) $\frac{4}{3}$ π نق^3 (جـ) $\frac{3}{4}$ π نق^2 (د) $\frac{4}{3}$ π نق^2

٢) الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[3]{3}$ سم يكون حجمها .... سم^3

(أ) ٤ π (ب) ٤ $\sqrt{3}$ π (جـ) $\frac{4}{3}$ π (د) $\frac{9}{4}$ π

٣) حجم كرة طول قطرها ٦ سم = ... سم^3

(أ) ٢٨٨ (ب) ١٢ π (جـ) ٣٦ π (د) ٢٨٨ π

٤) إذا كان حجم كرة = $\frac{9}{16}$ π سم^3 فإن طول نصف قطرها = ... سم

(أ) ٣ (ب) $\frac{4}{3}$ (جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$

٥) إذا كانت مساحة كرة = ٩ π سم^2 فإن طول قطرها = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) ١,٥ (د) ٦

٦) إذا كان ثلاثة أرباع حجم كرة يساوى ٨ π سم^3 فإن طول نصف قطرها يساوى .... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

٧) إذا كان طول نصف قطر الكرة نق سم فأى مما يلى يمثل النسبة بين مساحة الكرة وحجمها ؟

(أ) $\frac{4}{نق}$ (ب) $\frac{3}{نق}$ (جـ) $\frac{نق}{4}$ (د) $\frac{نق}{\pi}$

٣٤ أوجد طول نصف قطر كرة حجمها يساوى حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٨ سم وطول نصف قطر قاعدتها ٤ سم

«٦ سم»

٣٥ أوجد حجم كرة طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم^3 وارتفاعها ٢٤ سم (π = ٣,١٤)

«٤١٨٦ $\frac{2}{3}$ سم^3»

٣٦ متوازى مستطيلات مصنوع من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧ سم ، ٢٤ سم ، ٢١ سم شُكلت منه مادة لتكوين كرة أوجد طول نصف قطرها.

«٢١ سم»

٣٧ كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم ، صُهرت وحُولت إلى أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم ، احسب ارتفاع الأسطوانة.

«٤ سم»

٣٨ كرة حجمها ٣٦ π سم^3 وضعت داخل مكعب فمست أوجه المكعب الستة

أوجد : ١ طول نصف قطر الكرة. ٢ حجم المكعب.

«٣ سم ، ٢١٦ سم^3»

٣٩ كرة من المعدن طول نصف قطرها ١٦,٨ سم ، صُهرت وصُنع من مادتها المنصهرة ٨ كرات متساوية الحجم ، أوجد طول نصف قطر كل كرة.

«٨,٤ سم»

٤٠ أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٢٠ سم أوجد طول نصف قطر قاعدتها إذا علم أن حجمها يساوى $\frac{4}{9}$ حجم كرة طول قطرها ٣٠ سم

«١٠ سم»

للمتفوقين

٤١ متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ٣ سم فإذا كان مجموع أطوال أحرفه ٥٢ سم أوجد حجمه.

«٧٥ سم^3»

٤٢ كرة معدنية جوفاء طول نصف قطرها الداخلى ٢,١ سم وطول نصف قطرها الخارجى ٣,٥ سم. أوجد كتلتها لأقرب جرام علمًا بأن السنتيمتر المكعب من هذا المعدن كتلته ٢٠ جرامًا.

«٢٨١٧ جرامًا»



الدرس **10**

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

أولًا حل معادلات الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

* كل من المعادلات :
• ٢ س − ٥ = ٣
• √٣ س − ١ = ٨
• ١/٢ س − √٥ = ٠

تسمى معادلة من الدرجة الأولى فى متغير (مجهول) واحد وهو س لأن : أس المتغير س يساوى الواحد الصحيح

* ومعنى حل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح هو إيجاد العدد الحقيقى الذى يحقق هذه المعادلة.

* والأمثلة التالية سوف توضح كيفية حل معادلة الدرجة الأولى فى متغير واحد.

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١ ٣ س + ٢ = ١

٢ √٣ س − ١ = ٢

٣ ٧ س − √٧ = ٦ √٧

٤ س − √٥ = ١

الحل

١ $\because$ $٣س + ٢ = ١$ بإضافة -٢ للطرفين

$\therefore$ $٣س + ٢ - ٢ = ١ - ٢$

$\therefore$ $٣س = -١$ ويضرب الطرفين فى المعكوس الضربى لمعامل س وهو $\frac{١}{٣}$

$\therefore$ $٣س \times \frac{١}{٣} = -١ \times \frac{١}{٣}$ $\therefore$ $س = -\frac{١}{٣}$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{-\frac{١}{٣}\}$

* ويمكن تمثيل العدد $\frac{-١}{٣}$ على خط الأعداد كما يلى :



٢ $\because$ $\sqrt{٣}\,س - ١ = ٢$ $\therefore$ $\sqrt{٣}\,س = ٢ + ١$

$\therefore$ $\sqrt{٣}\,س = ٣$ $\therefore$ $س = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$\therefore$ $س = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ $\therefore$ $س = \sqrt{٣}$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{\sqrt{٣}\}$

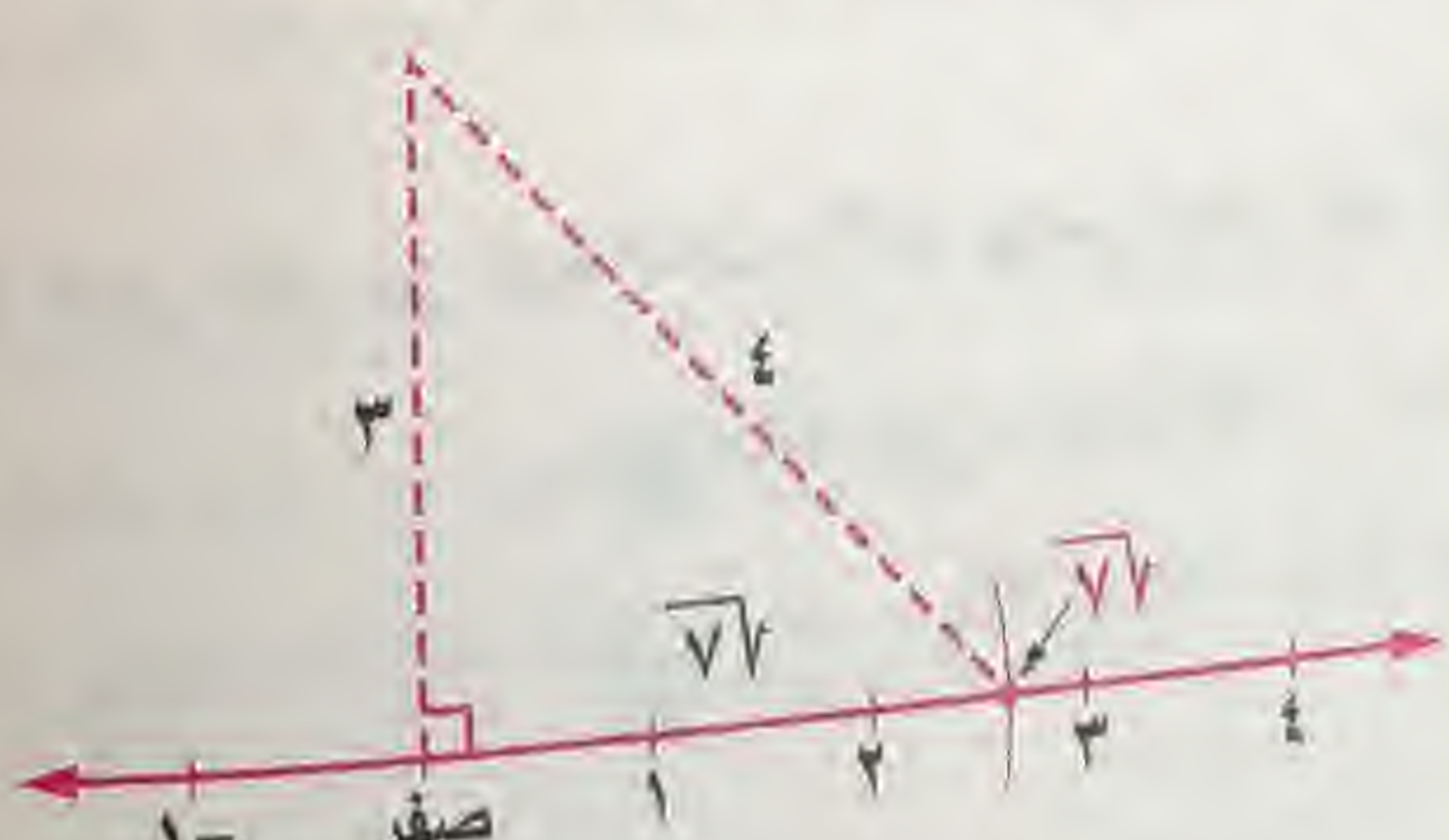
* ويمكن تمثيل العدد $\sqrt{٣}$ على خط الأعداد كما يلى :



٣ $\because$ $٧س - \sqrt{٧} = ٦\sqrt{٧}$ $\therefore$ $٧س = ٦\sqrt{٧} + \sqrt{٧}$ $\therefore$ $٧س = ٧\sqrt{٧}$

$\therefore$ $س = \frac{٧\sqrt{٧}}{٧}$ $\therefore$ $س = \sqrt{٧}$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{\sqrt{٧}\}$

* ويمكن تمثيل العدد $\sqrt{٧}$ على خط الأعداد كما يلى :



٤ ∵ س − √٥ = ١ ∴ س = ١ + √٥

* ويمكن تمثيل العدد (١ + √٥) على خط الأعداد كما بالشكل المقابل :

∴ مجموعة الحل = {١ + √٥}



حاول بنفسك ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١ ٢ س + ٥ = ٤
٢ √٥ س − ١ = ٤
٣ س − √٣ = ٢

ثانياً حل متباينات الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

* كل من المتباينات :
• ٢ س < ٥
• ٣ س + ٢ ≥ ١
• ٥ + س < ٢ س − ١ ≤ ٣ + س

تُسمى متباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد رمزنا له بالرمز س

* وحل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المتغير (س) التى تحقق هذه المتباينة.
* مجموعة حل هذه المتباينات فى ح سوف نكتبها على صورة فترة كما سيتضح فيما بعد.

وطرق حل مثل هذه المتباينات فى ح تعتمد على خواص علاقة التباين التى نلخصها فيما يلى :

بفرض أن أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية وكان أ < ب فإن :

- أ + حـ < ب + حـ ← سواء كانت حـ موجبة أو سالبة (خاصية الإضافة)
- أ حـ < ب حـ ← إذا كانت حـ موجبة (خاصية الضرب فى عدد حقيقى موجب)
- أ حـ > ب حـ ← إذا كانت حـ سالبة (خاصية الضرب فى عدد حقيقى سالب)

أى أن : عند ضرب (أو قسمة) طرفى المتباينة فى (على) عدد سالب يتغير اتجاه علامة التباين.

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة الحل لكل مما يأتي ومثل الحل على خط الأعداد :

١) ٢ س + ٦ < ٢

٢) ٥ − ٤ س ≥ −٣

الحل

١) ∵ ٢ س + ٦ < ٢ (وبإضافة المعكوس الجمعي للعدد ٦ وهو (−٦) للطرفين)

∴ ٢ س + ٦ − ٦ < ٢ − ٦

∴ ٢ س < −٤ (وبضرب الطرفين في المعكوس الضربي للعدد ٢ وهو $\frac{1}{2}$)

∴ ٢ س × $\frac{1}{2}$ < −٤ × $\frac{1}{2}$

∴ س < −٢

∴ مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية التي كل منها أقل من (−٢)

أي أن: مجموعة الحل =]−∞ ، −٢[



٢) ∵ ٥ − ٤ س ≥ −٣ (وبإضافة −٥ للطرفين)

∴ −٤ س ≥ −٨ (وبقسمة الطرفين على −٤)

∴ س ≤ ٢ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = [٢ ، ∞[



مثال ٣

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين ومثل الحل على خط الأعداد :

١) −٣ < ٢ س − ١ ≤ ٥

٢) ٣ < ٣ − ٥ س < ١٣

الحل

١) ∵ −٣ < ٢ س − ١ ≤ ٥ (بإضافة ١ لجميع الأطراف)

∴ −٢ < ٢ س ≤ ٦ (بقسمة جميع الأطراف على ٢) ∴ −١ < س ≤ ٣

∴ مجموعة الحل =]−١ ، ٣]



١ ∵ ٣ > ٣ - ٥ س > ١٣ (بطرح ٣ من جميع الأطراف)

∴ ٠ > - ٥ س > ١٠ (بقسمة جميع الأطراف على -٥)

∴ ٠ < س < -٢ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب)

∴ مجموعة الحل =]-٢ ، ٠[



مثال ٤

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينتين الآتيتين :

١ س - ٢ ≤ ٣ س - ٥　　　٢ س - ١ > ٣ س - ٣ ≥ س + ٥

الحل

١ ∵ س - ٢ ≤ ٣ س - ٥ (وبإضافة ٢ للطرفين)

∴ س ≤ ٣ س - ٣ (وبإضافة -٣ س للطرفين)

∴ -٢ س ≤ -٣ (وبضرب الطرفين في $-\frac{١}{٢}$)

∴ س ≥ $\frac{٣}{٢}$ (لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا ضربنا في عدد سالب)

∴ مجموعة الحل =]-∞ ، $\frac{٣}{٢}$]

٢ ∵ س - ١ > ٣ س - ٣ ≥ س + ٥ (وبإضافة ٣ للأطراف الثلاثة)

∴ س + ٢ > ٣ س ≥ س + ٨ (وبإضافة - س للأطراف الثلاثة)

∴ ٢ > ٢ س ≥ ٨ (وبالضرب في $\frac{١}{٢}$)

∴ ١ > س ≥ ٤　　　∴ مجموعة الحل =]١ ، ٤]

حل آخر لرقم ٢

يمكن تقسيم هذه المتباينة إلى متباينتين كالتالى :

س − ١ < ٣ س − ٣ ← (١)

، ٣ س − ٣ ≤ س + ٥ ← (٢)

فتكون مجموعة الحل للمتباينة الأصلية هى مجموعة تقاطع مجموعتى الحل للمتباينتين (١) ، (٢)

* إيجاد مجموعة الحل للمتباينة (١) :

∵ س − ١ < ٣ س − ٣ (وبإضافة ١ للطرفين)

∴ س < ٣ س − ٢ (وبإضافة −٣ س للطرفين)

∴ −٢ س < −٢ (وبضرب الطرفين فى $-\frac{1}{2}$)

∴ س > ١ ∴ مجموعة الحل =]١ ، ∞[

* إيجاد مجموعة الحل للمتباينة (٢) :

∵ ٣ س − ٣ ≤ س + ٥ (وبإضافة ٣ للطرفين)

∴ ٣ س ≤ س + ٨ (وبإضافة − س للطرفين)

∴ ٢ س ≤ ٨ (وبالضرب فى $\frac{1}{2}$)

∴ س ≤ ٤ ∴ مجموعة الحل =]−∞ ، ٤]

* مجموعة الحل للمتباينة الأصلية =]١ ، ∞[∩]−∞ ، ٤] =]١ ، ٤]

حاول بنفسك ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

١ ٣ س − ١ > ٨

٢ ٢ − ٢ س ≥ −٦

٣ −١٦ < ٥ س + ٤ ≤ ٩

٤ ٢ س + ١ > ٤ س − ٣ > ٢ س − ١١

تمارين 10

على حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح

اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١ س + ٥ = ٠

٢ ٥ س + ٦ = ١

٣ ٢ س + ٤ = ٣

٤ ٢ س − ٣ = ٤

٥ ٤ س − ١ = | −٢ |

٦ √٥ س − ١ = ٤

٧ س − ١ = √٣

٨ ٢ − √٦ س = | −٨ |

٩ س + ٢√٢ = ٣

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الشكل 

يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح

(أ) س > −٣ (ب) س ≤ −٣ (جـ) س < −٣ (د) س ≥ −٣

٢ الشكل 

يمثل مجموعة حل المتباينة .... فى ح

(أ) −٦ < س < ٦ (ب) −٦ ≤ س < ٦

(جـ) −٦ < س ≤ ٦ (د) −٦ ≤ س ≤ ٦

٣ إذا كانت : س ∈]٣ ، ∞[فإن : ....

(أ) س < ٣ (ب) س ≤ ٣ (جـ) س > ٣ (د) س ≥ ٣

٤ مجموعة حل المتباينة : س > ٧ فى ح هى ....

(أ)]−٧ ، ∞[(ب) [٧ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٧[(د)]٧ ، ∞[

٥ مجموعة حل المتباينة : −١ < س ≤ ٥ فى ح هى ....

(أ)]−١ ، ٥] (ب) [−١ ، ٥] (جـ) {−١ ، ٥} (د) [−١ ، ٥[

٦ مجموعة حل المتباينة : −س > ٣ فى ح هى ....

(أ) {−٣} (ب)]٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣[(د)]−∞ ، −٣[

٣ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١) ٢ س > ٦
٢) −٧ س ≥ −١٤
٣) س + ٣ ≤ ٥
٤) ٥ − س > ٣
٥) ٢ س + ٥ ≥ ٣
٦) ١ − ٥ س < ٦
٧) ١/٢ س + ١ ≤ ٢
٨) ٣ − ٢ س ≤ ٧

٤ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١) ٣ < س + ٢ ≤ ٦
٢) −٥ < س + ٣ < ٩
٣) −٣ ≤ − س < ٣
٤) ١ < ٥ − س ≤ ٢
٥) ∛(−٨) ≤ س + ١ ≤ √٩
٦) ٥ < ٣ − س ≤ ٢^٣
٧) −٨ ≤ ٣ س + ١ ≤ ٤
٨) |−٣| < ٢ س − ١ < ٥
٩) −٣ < ١/٢ س − ٢ ≤ صفر
١٠) ٠ ≤ (−٢ س + ٦)/٣ < ٤

٥ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

١) ٣ س < ٢ س + ٤
٢) ٧ س − ٩ ≤ ٤ س
٣) ٥ س − ٣ < ٢ س + ٩
٤) ٧ س − ١٢ ≤ ٥ س − ٨
٥) س − ١ ≤ ٣ − س
٦) ١ − س ≤ −٢ س − ٣

٦ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثلها على خط الأعداد :

١) س + ٣ ≥ ٢ س ≥ س − ٢
٢) − س < س < ٤ − س
٣) ٤ س ≤ ٥ س + ٢ < ٤ س + ٣
٤) س − ١ < ٣ س − ١ ≤ س
٥) ٢ + ٢ س ≤ ٣ س + ٣ < ٥ + ٢ س
٦) (٣ س − ٤)/٦ < س + ١ <

٧ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان : س − ٣ ≤ ٠ فإن : س ....

٢ إذا كان : ٥ س < ١٥ فإن : س ....

٣ إذا كان : ١ − س < ٤ فإن : س ....

٤ إذا كان : −٢ س ≥ ٣ فإن : س ....

٥ إذا كان : √٢ س ≤ ٤ فإن : س ....

٦ مجموعة حل المتباينة : ٤ < ٢ س < ٨ فى ح هى ....

٧ مجموعة حل المتباينة : −٥ ≤ − س < ٢ فى ح هى ....

٨ مجموعة حل المتباينة : ٢ − س < ٠ فى ح هى ....

٩ إذا كانت : −٣ < س < ٣ حيث س ∈ ح فإن : ٢ س ∈]−٦ ، ....[

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموعة حل المتباينة : س + ٣ < ٣ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ٠[(ب)]−∞ ، ٠] (ج) [٠ ، ∞[(د)]٠ ، ∞[

٢ مجموعة حل المتباينة : ١ > س − ٥ > −١ فى ح هى ....

(أ) [٤ ، ٦] (ب)]٤ ، ٦[(ج)]٤ ، ٦] (د) [٤ ، ٦[

٣ إذا كانت : س > ٥ فإن : − س ....

(أ) > −٩ (ب) ≤ −٥ (ج) > −٥ (د) < −٥

٤ إذا كان: $-٢ < س < ٢$ فإن: $٢س + ٣$ تنتمي إلى ....

(أ) [−١ ، ٧]　(ب)]−١ ، ٥[　(جـ)]−١ ، ٧[　(د)]−٤ ، ٦[

٥ العدد ٥ ينتمي إلى مجموعة حل المتباينة ....

(أ) $س > ٥$　(ب) $س < ٥$　(جـ) $-س \geq -٥$　(د) $-س \geq ٥$

تطبيق حياتي

٩ مصعد لنقل البضائع أقصى حمولة له ٢٢٠٠ كجم فإذا كان لدينا ٦٠ صندوقًا من المع...
وكان وزن الصندوق الواحد ٤٥ كجم فأوجد أكبر عدد من الصناديق يستطيع المصعد ...
في المرة الواحدة دون ركوب أي شخص.

للمتفوقين

١٠ أثبت أن: $\sqrt{٣}$ ينتمي لمجموعة حل المتباينة: $٠ < ٤ - ٢س < ٦$ في ح

١١ إذا كانت: [٤ ، ٧] هي مجموعة حل المتباينة: $أ \leq س - ٣ \leq ب$

فأوجد قيمة كل من: أ ، ب

١٢ إذا كانت: [م ، م + ن] هي مجموعة حل المتباينة: $\frac{١}{٥} \leq \frac{٢س + ١}{٥} \leq ١$

فأوجد قيمة: ن

١٣ إذا كان: $٥ \leq \frac{٢س}{٣} + ١ \leq ٧$

فأوجد أصغر قيمة للمقدار: $س - ٢$

١٤ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة: $\frac{س}{\sqrt{٣} - \sqrt{٥}} \leq \sqrt{٣} + \sqrt{٥}$

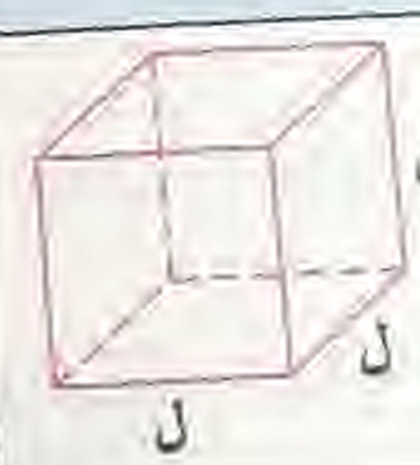
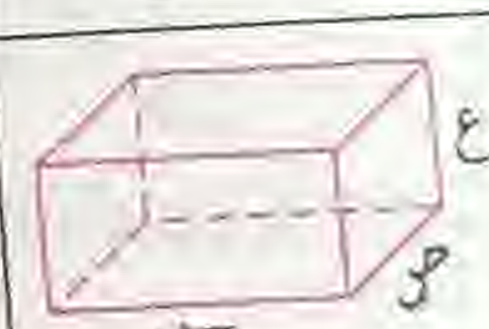
ملخص الجزء الثانى

من الوحدة الأولى (من درس 6 حتى درس 10)

- إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن :
  - $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ ب}$
  - $\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ (حيث ب $\neq$ ٠)
- إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :
  - $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أ ب}$
  - $\frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب}}$ (حيث ب $\neq$ ٠)
- إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين فإن :

  كلًا من العددين : $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$ هو مرافق للعدد الآخر ويكون :
  - مجموعهما = $٢ \sqrt{أ}$
  - حاصل ضربهما = أ − ب
- إذا كان لدينا عدد حقيقى مقامه على الصورة : $(\sqrt{أ} + \sqrt{ب})$ أو $(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})$

  فإننا نضعه فى أبسط صورة بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام.
- الجدول التالى يلخص قواعد حساب مساحات وحجوم بعض المجسمات :

المجسم		المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب		٤ ل^{٢}	٦ ل^{٢}	ل^{٣}
متوازى المستطيلات		٢ (س + ص) × ع	٢ (س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
الأسطوانة الدائرية القائمة		٢ π نق ع	٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} = ٢ π نق (ع + نق)	π نق^{٢} ع
الكرة		−	٤ π نق^{٢}	$\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

تذكر أن : محيط الدائرة = ٢ π نق ، مساحة الدائرة = π نق^{٢}

- حل المعادلة أو المتباينة هو إيجاد قيم المتغير الذى يحقق هذه المعادلة أو المتباينة.
- مجموعة حل المتباينة من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ح تكتب على صورة فترة.



امتحانات على الجزء الثانى

من الوحدة الأولى (من درس ٦ حتى درس ١٥)

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ حجم كرة طول قطرها ٣ سم يساوى .... سم^{٣}

(أ) ٤٫٥ π (ب) ٣٦ π (جـ) ٢٨٨ π (د) ٤٫٥

٢ إذا كانت : $س > ٣$ فإن : $-س$ ....

(أ) < ٣ (ب) > -٣ (جـ) < -٣ (د) $< \frac{١}{٣}$

٣ $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٥} =$ ....

(أ) $\sqrt{١٥}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٠}$ (د) ١٥

٤ مكعب حجمه ١٢٥ سم^{٣} فإن مساحته الكلية تساوى .... سم^{٢}

(أ) ٣٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

٥ إذا كانت : $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، $ص = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ فإن : س ص = ...

(أ) ٤ (ب) ١٠ (جـ) ٤٠ (د) ٥٨

٦ $\frac{\sqrt[٣]{٢٤}}{\sqrt[٣]{٣}} =$ ....

(أ) ٨ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) $\sqrt[٣]{٢}$

---

٢ أكمل ما يأتى :

١ المعكوس الضربى للعدد $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$ فى أبسط صورة هو ....

٢ $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٢} = ٢ \times$ ....

٣ $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} =$ .... (فى أبسط صورة)

٤ أسطوانة دائرية قائمة حجمها 500π سم^3 وطول قطر قاعدتها ١٠ سم فإن ارتفاعها يساوى ....

٥ إذا كان : $1 - س > 5$ فإن : س ....

٣ **(أ) أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :** $\sqrt{18} + \sqrt[3]{54} - 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$

(ب) كرة حجمها 36π سم^3 احسب مساحتها.

٤ **(أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :** $-3 < 2س + 1 < 7$ **ومثل الحل على خط الأعداد.**

(ب) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوى طول نصف قطر قاعدتها وحجمها 27π سم^3 أوجد طول نصف قطر قاعدتها.

٥ **(أ) اختصر لأبسط صورة :** $\sqrt{32} - \sqrt{72} + 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

(ب) إذا كانت : $س = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ ، $ص = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

أثبت أن : س ، ص مترافقان ثم أوجد : $س^2 + 2س ص + ص^2$

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \frac{3}{2} = \sqrt{\text{..........}}$

(أ) $\frac{3}{8}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (جـ) $\frac{27}{8}$ (د) $\frac{729}{64}$

٢ العدد $(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ هو عدد ....

(أ) طبيعى. (ب) نسبى. (جـ) غير نسبى. (د) أولى.

٣ $\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ ....

(أ) ٣ (ب) $\sqrt{6}$ (جـ) $2\sqrt{6}$ (د) $2\sqrt{3}$

٤ كرة حجمها $\frac{٤}{٣}$ π سم^{٣} فإن طول قطرها = ... سم

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) $\frac{٤}{٣}$

٥ مكعب حجمه $٢\sqrt{٢}$ سم^{٣} فإن طول حرفه يساوى .... سم

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ٤

٦ $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٢} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) $\sqrt[٣]{٤}$ (د) $\sqrt[٣]{٢}$

٢ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان : $س = \frac{١}{\sqrt{٨} - \sqrt{٥}}$ ، س ص = ١ فإن : ص = ...

٢ مجموعة حل المتباينة : ٤ > -٢ س فى ح هى ....

٣ $\frac{\sqrt[٣]{٣٢}}{\sqrt[٣]{٤}} =$ .... ٤ $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})^{٢} =$ ....

٥ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم^{٣} وارتفاعها ١٠ سم فإن طول نصف قطر قاعدتها يساوى .... سم

٣ (أ) أثبت أن : $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{١٦} - ٢\sqrt[٣]{٥٤} =$ صفر

(ب) إذا كان : $أ = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ب = \sqrt{٧} - \sqrt{٣}$ أوجد فى أبسط صورة : $\frac{أ-ب}{أ-}$

٤ (أ) اختصر : $٢\sqrt{٥} + ٩\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{٢٧} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$

(ب) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٦ π سم^{٣} وارتفاعها ٤ سم وطول نصف قطر قاعدتها يساوى طول حرف مكعب أوجد المساحة الكلية للمكعب.

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٢٣١ سم^{٣} وارتفاعها ٦ سم احسب مساحتها الجانبية. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : ٥ س - ٣ > ٢ س + ٩ ومثل الحل على خط الأعداد.

مشروع بحثى



على الوحدة الأولى

أهداف المشروع

- إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية.
- إيجاد الحجوم كتطبيق على إجراء العمليات على الأعداد الحقيقية.
- الربط بين الرياضيات والعلوم.

المطلوب

« كوكب الأرض الذى نعيش عليه هو أحد كواكب المجموعة الشمسية التى تتكون من ثمانية كواكب تدور حول الشمس »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

(١) اذكر أسماء كواكب المجموعة الشمسية.

(٢) ابحث عن طول نصف قطر كل كوكب من كواكب المجموعة الشمسية ثم أوجد حجمه.

(٣) رتب كواكب المجموعة الشمسية من الأكبر إلى الأصغر تبعًا لحجمها.

(٤) أوجد فى أبسط صورة وزن جسم على سطح الأرض إذا كان وزنه على سطح القمر يساوى ٣٠ $\sqrt{١٨}$ كجم.

الوحدة
2
العلاقة بين متغيرين



دروس الوحدة :

- الدرس 1 : العلاقة بين متغيرين.
- الدرس 2 : ميل الخط المستقيم.
- الدرس 3 : تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم.

مشروع بحثى على الوحدة الثانية

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- يتعرف العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- يمثل بيانيًا العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- يتعرف ميل الخط المستقيم.
- يوجد ميل الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين.
- يتعرف ميل الخط المستقيم الموازى لمحور السينات ، وميل الخط المستقيم الموازى لمحور الصادات.
- يتحقق باستخدام ميل الخط المستقيم أن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة أو لا تقع على استقامة واحدة.
- يوجد السرعة المنتظمة التى تسير بها سيارة باستخدام ميل الخط المستقيم.
- يحل تطبيقات على ميل الخط المستقيم.



الدرس **1**

العلاقة بين متغيرين

مفهوم العلاقة بين متغيرين

• إسلام يمتلك ٥٠ جنيهًا ، فإذا ذهب إسلام إلى مدينة الملاهى ووجد هناك نوعين من الألعاب المفضلة إليه :

النوع الأول
يتكلف ٥ جنيهات عن اللعب للمرة الواحدة.



النوع الثانى
يتكلف ١٠ جنيهات عن اللعب للمرة الواحدة.

ما هى الإمكانات المتاحة للعب بكلا النوعين بحيث ينفق كل ما معه من نقود ؟!!

• لدراسة كل الإمكانات المتاحة نفرض أن :

- عدد المرات التى يمكن أن يلعبها من النوع الأول هو س ومن النوع الثانى ص
- فيكون : تكلفة مرات اللعب من النوع الأول هى ٥ س جنيهًا

، تكلفة مرات اللعب من النوع الثانى هى ١٠ ص جنيهًا.

- وحتى ينفق كل ما معه من نقود يجب أن يكون : ٥ س + ١٠ ص = ٥٠

وهى علاقة رياضية بين المتغيرين س ، ص وتسمى **معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين**

ويمكن تبسيط المعادلة السابقة بقسمة جميع حدودها على ٥

فنحصل على معادلة مكافئة وهى $س + ٢ ص = ١٠$

ويمكن كتابتها على الصورة : $٢ ص = ١٠ - س$

أى أن : $ص = \frac{١٠ - س}{٢}$

$٥ س + ١٠ ص = ٥٠$ (÷ ٥)

$س + ٢ ص = ١٠$

$٢ ص = ١٠ - س$ (÷ ٢)

$ص = \frac{١٠ - س}{٢}$

فمثلاً :

* إذا قرر إسلام عدم اللعب بالنوع الأول أى أن : $س = ٠$ فإن : $ص = \frac{١٠ - ٠}{٢} = ٥$

أى أنه يمكنه إنفاق المبلغ بالكامل على اللعب ٥ مرات من النوع الثانى ويعبر عن ذلك بالزوج المرتب (٠ ، ٥)

* وإذا قرر اللعب بالنوع الأول مرة واحدة أى أن : $س = ١$ فإن : $ص = \frac{١٠ - ١}{٢} = ٤\frac{١}{٢}$

ولكن فى هذه الحالة لا يمكن اللعب عدد $٤\frac{١}{٢}$ مرة من النوع الثانى لأن عدد مرات اللعب يجب أن يكون عدد طبيعى.

* وإذا قرر اللعب مرتين بالنوع الأول أى أن : $س = ٢$ فإن : $ص = \frac{١٠ - ٢}{٢} = ٤$

أى أنه يمكنه إنفاق المبلغ بالكامل على اللعب مرتين من النوع الأول وأربع مرات من النوع الثانى ونعبر عن ذلك بالزوج المرتب (٢ ، ٤)

وهكذا يمكن معرفة الإمكانات المختلفة ووضعها فى جدول كالآتى :

س (عدد مرات اللعب من النوع الأول)	٠	٢	٤	٦	٨	١٠
ص (عدد مرات اللعب من النوع الثانى)	٥	٤	٣	٢	١	٠

ملاحظات

- يوجد عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحقق العلاقة السابقة ولكن بعض الأزواج المرتبة لا تصلح للتعبير عن عدد مرات اللعب لأن عدد مرات اللعب لابد أن يكون عدد طبيعيًا.
- فكما ذكرنا سابقًا (١ ، ٤ ١/٢) يحقق العلاقة ولكن لا يمكن استخدامه للتعبير عن عدد مرات اللعب لأن ٤ ١/٢ ∉ ط
- وبالمثل (-٢ ، ٦) يحقق العلاقة ولكن لا يمكن استخدامه للتعبير عن عدد مرات اللعب لأن -٢ ∉ ط
- لدراسة كل الإمكانات المتاحة كتبنا المعادلة : س + ٢ ص = ١٠ بجعل ص فى طرف مستقل على الصورة : ص = (١٠ - س) / ٢

ويمكن أيضًا جعل س فى طرف مستقل فتكون المعادلة على الصورة : س = ١٠ - ٢ ص

وهذا ما سوف نتبعه عند حل المثال التالى.

مثال ١

ما هى الإمكانات المختلفة ليدفع شخص مبلغ ٤٥ جنيهًا باستخدام نوعين من الأوراق المالية فئة ٥ جنيهات ، وفئة ١٠ جنيهات ؟

الحل

نفرض أن : عدد الأوراق فئة ٥ جنيهات هو س فتكون قيمتها ٥ س جنيهًا

، عدد الأوراق فئة ١٠ جنيهات هى ص فتكون قيمتها ١٠ ص جنيهًا

∴ ٥ س + ١٠ ص = ٤٥ وبقسمة طرفى المعادلة على ٥

∴ س + ٢ ص = ٩

نجعل س فى طرف مستقل فتكون المعادلة على الصورة : س = ٩ - ٢ ص

والجدول التالى يوضح الإمكانات المختلفة لدفع المبلغ :

ص	س	(س ، ص)	عدد الأوراق المالية من كل نوع
٠	٩ − ٢ × ٠ = ٩	(٩ ، ٠)	٩ ورقات فئة ٥ جنيهات.
١	٩ − ٢ × ١ = ٧	(٧ ، ١)	٧ ورقات فئة ٥ جنيهات. ، وورقة واحدة فئة ١٠ جنيهات.
٢	٩ − ٢ × ٢ = ٥	(٥ ، ٢)	٥ ورقات فئة ٥ جنيهات. ، وورقتان فئة ١٠ جنيهات.
٣	٩ − ٢ × ٣ = ٣	(٣ ، ٣)	٣ ورقات فئة ٥ جنيهات. ، ٣ ورقات فئة ١٠ جنيهات.
٤	٩ − ٢ × ٤ = ١	(١ ، ٤)	ورقة واحدة فئة ٥ جنيهات. ، ٤ ورقات فئة ١٠ جنيهات.

لاحظ أنه : إذا كانت ص = ٥ فإن : س = −١ ∉ ط ولذلك فإن ص = ٥ لا تصلح.

حاول بنفسك ١

أوجد الإمكانات المختلفة ليدفع شخص مبلغ ٦٥ جنيهًا بأوراق مالية فئة ٥ جنيهات ، ٢٠ جنيهًا.

العلاقة الخطية

العلاقة الخطية هى علاقة من الدرجة الأولى بين متغيرين س ، ص وتكون على الصورة :

أ س + ب ص = حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠

ويوجد عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة يحقق هذه العلاقة والتى عند تمثيلها بيانيًا تكون خط مستقيم.

ولذلك سُميت بالعلاقة الخطية وسوف يتضح لنا ذلك لاحقًا عند دراسة التمثيل البيانى للعلاقة الخطية.

مثال ٢

أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية :

١ ٣ س + ص = ٥ ٢ ٣ س - ٢ ص = ٦ ٣ ٢ س = ٣ ٤ ص = ...

الحل

يمكن إيجاد الأزواج المرتبة بوضع قيمة س وإيجاد قيمة ص المناظرة أو العكس

١ • بوضع س = ٠ ∴ ٣ × ٠ + ص = ٥ ∴ ص = ٥

∴ (٠ ، ٥) يحقق العلاقة.

• بوضع س = ١ ∴ ٣ × ١ + ص = ٥ ∴ ص = ٥ - ٣ = ٢

∴ (١ ، ٢) يحقق العلاقة.

• بوضع س = -٢ ∴ ٣ × (-٢) + ص = ٥ ∴ ص = ٥ + ٦ = ١١

∴ (-٢ ، ١١) يحقق العلاقة.

٢ يمكن التعويض مباشرة كما تم فى ١ ولكننا سنقدم طريقة أخرى للحل بوضع أحد المتغيرين فى طرف مستقل.

∵ ٣ س - ٢ ص = ٦ ∴ -٢ ص = ٦ - ٣ س وبالضرب فى -١

∴ ٢ ص = ٣ س - ٦ ∴ ص = $\frac{٣ س - ٦}{٢}$

• بوضع س = ٠ ∴ ص = $\frac{٣ \times ٠ - ٦}{٢}$ = -٣ ∴ (٠ ، -٣) يحقق العلاقة

• بوضع س = ١ ∴ ص = $\frac{٣ \times ١ - ٦}{٢}$ = $-\frac{٣}{٢}$ = $-١\frac{١}{٢}$ ∴ (١ ، $-١\frac{١}{٢}$) يحقق العلاقة

• بوضع س = ٢ ∴ ص = $\frac{٣ \times ٢ - ٦}{٢}$ = ٠ ∴ (٢ ، ٠) يحقق العلاقة

٣ ∵ ٢ س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∴ س = $١\frac{١}{٢}$

هذه العلاقة يحققها جميع الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث س = $١\frac{١}{٢}$ مهما كانت قيمة ص

مثل : ($١\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، ($١\frac{١}{٢}$ ، ١) ، ($١\frac{١}{٢}$ ، ٢)

٤ ص = -٢

هذه العلاقة يحققها جميع الأزواج المرتبة (س ، ص) بحيث ص = -٢ مهما كانت قيمة س

مثل : (٠ ، -٢) ، (١ ، -٢) ، (٢ ، -٢)

مثال ٣

بيِّن أى الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة : ٢ س - ص = ١

(٠ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (-٢ ، -٥)

الحل

• بوضع : س = ٠ ، ص = ١

∴ ٢ س - ص = ٢ (٠) - ١ = -١ ≠ ١ ∴ (٠ ، ١) لا يحقق العلاقة.

• بوضع : س = ٥ ، ص = ٣

∴ ٢ س - ص = ٢ (٥) - ٣ = ٧ ≠ ١ ∴ (٥ ، ٣) لا يحقق العلاقة.

• بوضع : س = ٣ ، ص = ٥

∴ ٢ س - ص = ٢ (٣) - ٥ = ١ ∴ (٣ ، ٥) يحقق العلاقة.

• بوضع : س = -٢ ، ص = -٥

∴ ٢ س - ص = ٢ (-٢) - (-٥) = ١ ∴ (-٢ ، -٥) يحقق العلاقة.

مثال ٤

١ إذا كان : (-٢ ، ١) يحقق العلاقة : ٣ س + ب ص = ١ **فأوجد قيمة : ب**

٢ إذا كان : (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٥ س - ص = ٦ **فأوجد قيمة : ك**

الحل

١ ∵ (-٢ ، ١) يحقق العلاقة : ٣ س + ب ص = ١ ∴ ٣ (-٢) + ب (١) = ١

∴ -٦ + ب = ١ ∴ ب = ١ + ٦ ∴ ب = ٧

٢ ∵ (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : ٥ س − ص = ٦ ∴ ٥ (ك) − (٢ ك) = ٦

∴ ٥ ك − ٢ ك = ٦ ∴ ٣ ك = ٦ ∴ ك = ٢

حاول بنفسك ٢

١ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٣ س + ص = ٢

٢ إذا كان (٣ ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : س − ٣ ص = ٩ فأوجد قيمة : ك

التمثيل البيانى للعلاقة الخطية

- سبق أن ذكرنا أن العلاقة الخطية بين س ، ص والتى تكتب عادة على الصورة :
أ س + ب ص = حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠ يمثلها بيانيًا خط مستقيم ولذلك سُميت علاقة خطية.

- عند تمثيل العلاقة الخطية بيانيًا نوجد على الأقل زوجين مرتبين يحققان العلاقة.
ثم يمكن إيجاد زوج مرتب ثالث لنتأكد من أن النقاط الثلاثة التى تمثل الأزواج المرتبة الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد فيكون هذا الخط هو التمثيل البيانى للعلاقة. والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال ٥

مثل بيانيًا العلاقة : ٢ س − ص = ٣

الحل

لتمثيل هذه العلاقة بيانيًا نعين ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٢ س − ص = ٣ وذلك :

- بوضع : س = ٠ ∴ ٢ × ٠ − ص = ٣ ∴ − ص = ٣ ∴ ص = −٣
- بوضع : س = ١ ∴ ٢ × ١ − ص = ٣ ∴ − ص = ١ ∴ ص = −١
- بوضع : س = ٢ ∴ ٢ × ٢ − ص = ٣ ∴ − ص = −١ ∴ ص = ١

ويمكن وضع قيم س ، ص فى جدول كالتالى :

س	٠	١	٢
ص	-٣	-١	١

ونعين فى النظام الإحداثى المتعامد النقط التى

تمثل الأزواج المرتبة :

(٠ ، -٣) ، (١ ، -١) ، (٢ ، ١)

ونرسم الخط المستقيم المار بهم فيكون

هو التمثيل البيانى للعلاقة ٢ س - ص = ٣



ملاحظة

جميع نقط الخط المستقيم الممثل للعلاقة تعين أزواج مرتبة تحقق العلاقة.

فمثلًا : النقطة أ تعين الزوج المرتب (-١ ، -٥) وهو يحقق العلاقة.

فعند وضع س = -١ نجد أن ٢ × (-١) - ص = ٣

أى أن : ص = -٥ وكذلك النقطة ب (-٢ ، -٧)

حاول بنفسك ٣

مثل بيانيًا العلاقة : ص - ٢ س = -١

حالات خاصة

• سبق أن درسنا العلاقة : أ س + ب ص = حـ حيث أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠ وهي تسمى علاقة خطية وتمثل بيانيًا بخط مستقيم ، وندرس الحالات التالية :

أمثلة

١ إذا كان : أ = ٠ ، ب ≠ ٠

فتصبح العلاقة على الصورة :

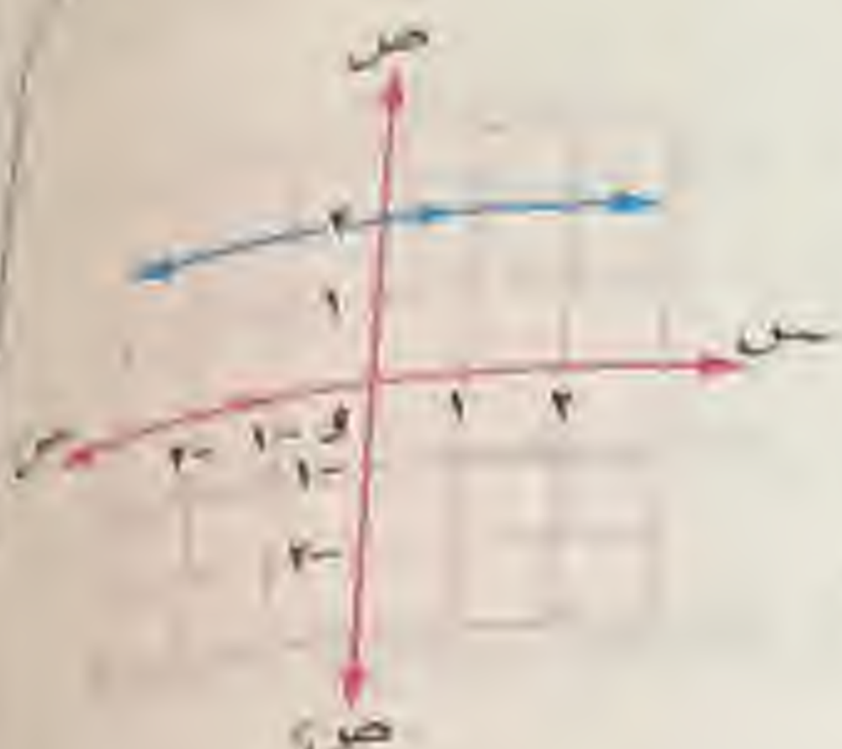
ب ص = حـ

ويمثلها بيانيًا مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة $\left(٠ ، \frac{حـ}{ب}\right)$

العلاقة ٢ ص = ٤

أي : ص = ٢

يمثلها بيانيًا مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٢)



لاحظ أن : العلاقة ص = ٠ يمثلها محور السينات.

٢ إذا كان : ب = ٠ ، أ ≠ ٠

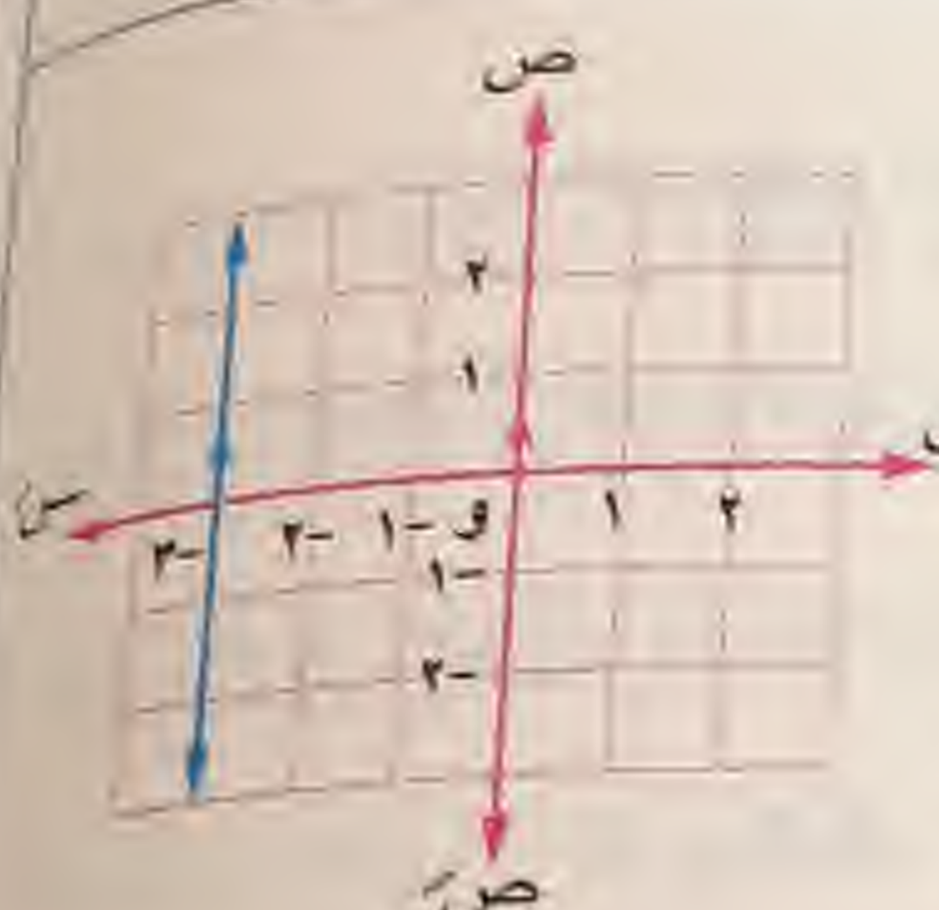
فتصبح العلاقة على الصورة :

أ س = حـ

ويمثلها بيانيًا مستقيم يوازي محور الصادات ويقطع محور السينات في النقطة $\left(\frac{حـ}{أ} ، ٠\right)$

العلاقة س = −٣

يمثلها بيانيًا مستقيم يوازي محور الصادات ويقطع محور السينات في النقطة (−٣ ، ٠)



لاحظ أن : العلاقة س = ٠ يمثلها محور الصادات.

٣ إذا كان : حـ = ٠

فتصبح العلاقة على الصورة :

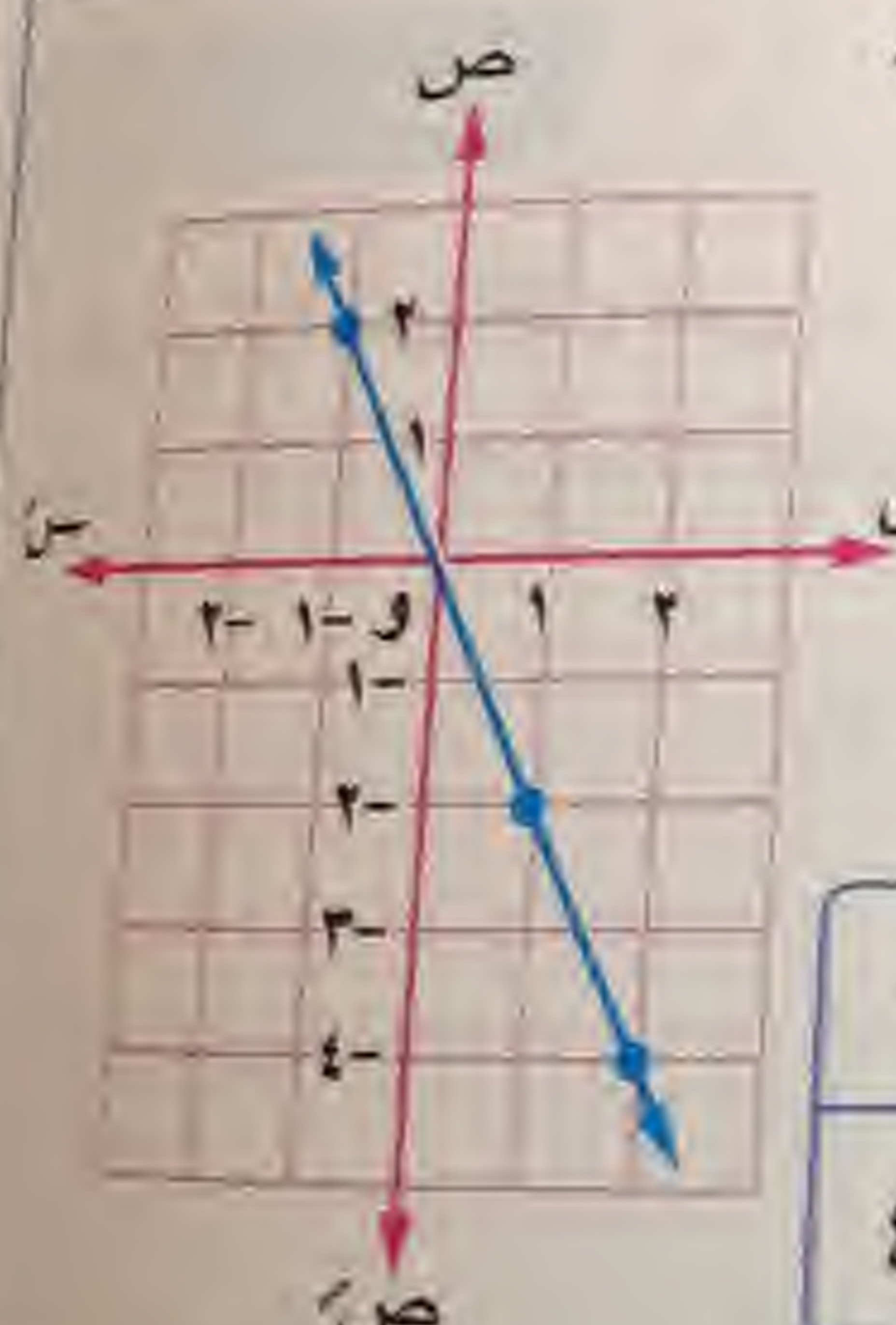
أ س + ب ص = ٠

ويمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

العلاقة ٢ س + ص = ٠

يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل كما في الشكل المقابل :

س	١	−١	٢
ص	−٢	٢	−٤



مثال ٦

ارسم المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ٥ ص = ١٠

وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب

فأوجد مساحة المثلث و أ ب حيث «و» هى نقطة الأصل.

الحل

∵ ٢ س + ٥ ص = ١٠

∴ ٢ س = ١٠ − ٥ ص

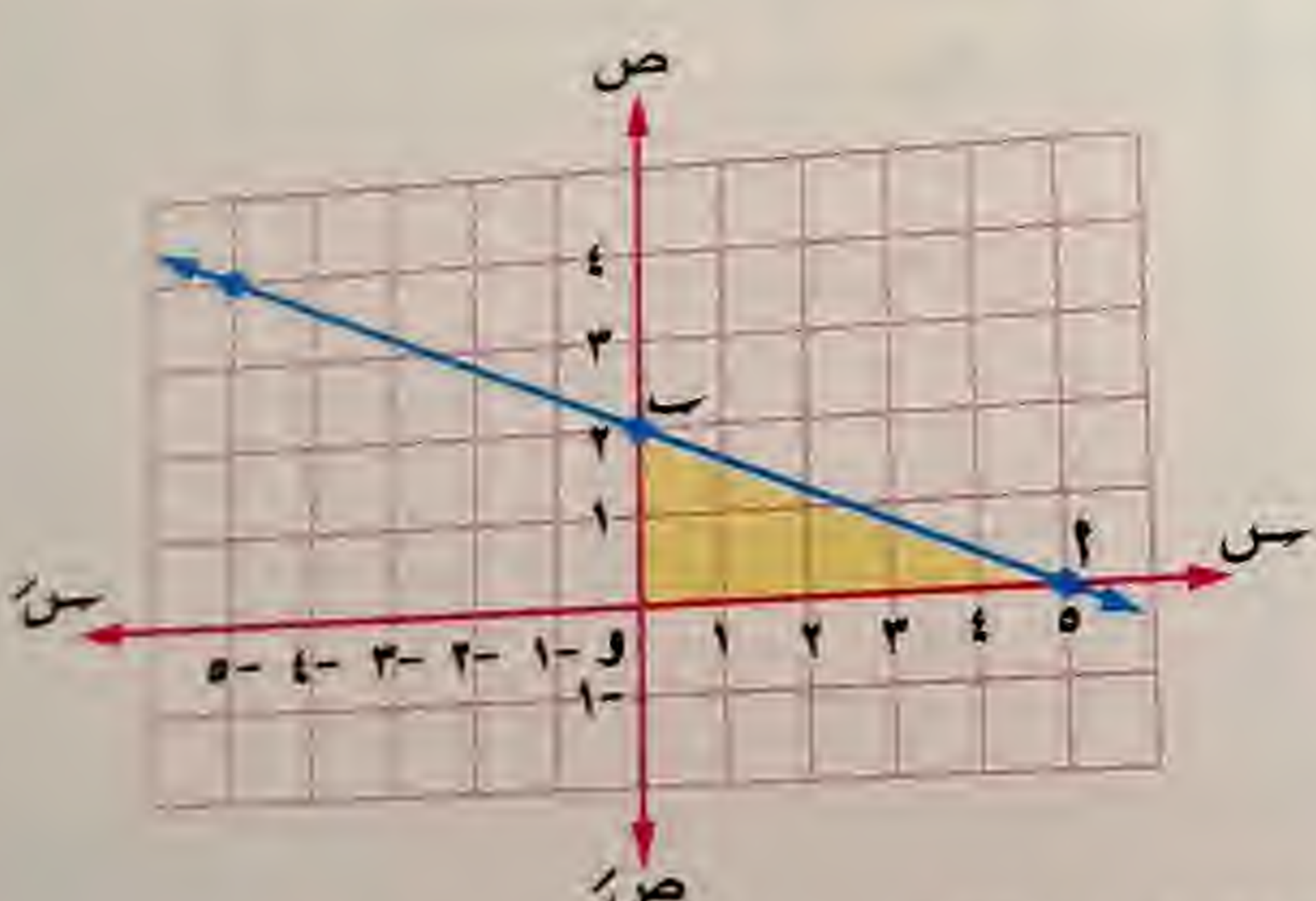
∴ س = $\frac{١٠ - ٥ ص}{٢}$

• بوضع : ص = ٠ ∴ س = $\frac{١٠ - ٥ (٠)}{٢}$ = ٥ ∴ (٥ ، ٠) يحقق العلاقة.

• بوضع : ص = ٢ ∴ س = $\frac{١٠ - ٥ (٢)}{٢}$ = ٠ ∴ (٠ ، ٢) يحقق العلاقة.

• بوضع : ص = ٤ ∴ س = $\frac{١٠ - ٥ (٤)}{٢}$ = −٥ ∴ (−٥ ، ٤) يحقق العلاقة.

س	٥	٠	−٥
ص	٠	٢	٤



∵ المستقيم يقطع محور السينات

فى النقطة (٥ ، ٠)

∴ و أ = ٥ وحدات طول

، ∵ المستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

∴ و ب = ٢ وحدة طول

، ∵ مساحة Δ و أ ب = $\frac{١}{٢}$ و أ × و ب

= $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ٢ = ٥ وحدات مربعة.

ملاحظة

في المثال السابق : يمكن إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم الذي يمثل العلاقة : ٢ س + ٥ ص = ١٠ مع محوري الإحداثيات دون الاستعانة بالتمثيل البياني له وذلك.

- بوضع : ص = ٠ $\therefore$ ٢ س + ٥ (٠) = ١٠

$\therefore$ ٢ س = ١٠ $\therefore$ س = ٥

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي (٥ ، ٠)

- بوضع : س = ٠ $\therefore$ ٢ (٠) + ٥ ص = ١٠

$\therefore$ ٥ ص = ١٠ $\therefore$ ص = ٢

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ٢)



تمارين 11

على العلاقة بين متغيرين

اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل الأزواج المرتبة الآتية التى تحقق العلاقة : ص = ٢ س - ١

(٥ ، ....) ، (٢ ، ....) ، (٠ ، ....) ، (-٣ ، ....)

٢ بيّن أيًا من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة : ص - ٤ س = ٧

١ (١ ، ٣) ٢ (٣ ، -٥) ٣ (-١ ، ٣)

٣ أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق كلاً من العلاقات الآتية :

١ ٢ س - ص = ٥

٢ ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

٣ ص = ٢

٤ ٢ س = ٥

٤ باستخدام العلاقات الخطية أكمل الجداول الآتية :

١ ٤ س - ص = -١

س	٠	١	٢	٣
ص	.....	.....	.....	.....

٢ ص = ٥ س + ١٥

س	-٤	-٣	-٢
ص	.....	.....	.....

٣ أ - ب = ٤

أ	١	.....	.....
ب	.....	٠	-١

٤ أ - ٣ب = ٥

أ	٢	.....	-١
ب	.....	٠	.....

٥ إذا كانت : ص - ٢ س = ١ **فأوجد :**

١ ص عندما س = ٣

٢ ص عندما س = -٥

٣ س عندما ص = ١

٤ س عندما ص = -١

٦ إذا كان : (٣ ، ٦) يحقق العلاقة : ص = ك س **فأوجد قيمة : ك** «٢»

٧ إذا كان : (٣ ، ١) يحقق العلاقة : ص − ٣ س = أ فأوجد قيمة : أ

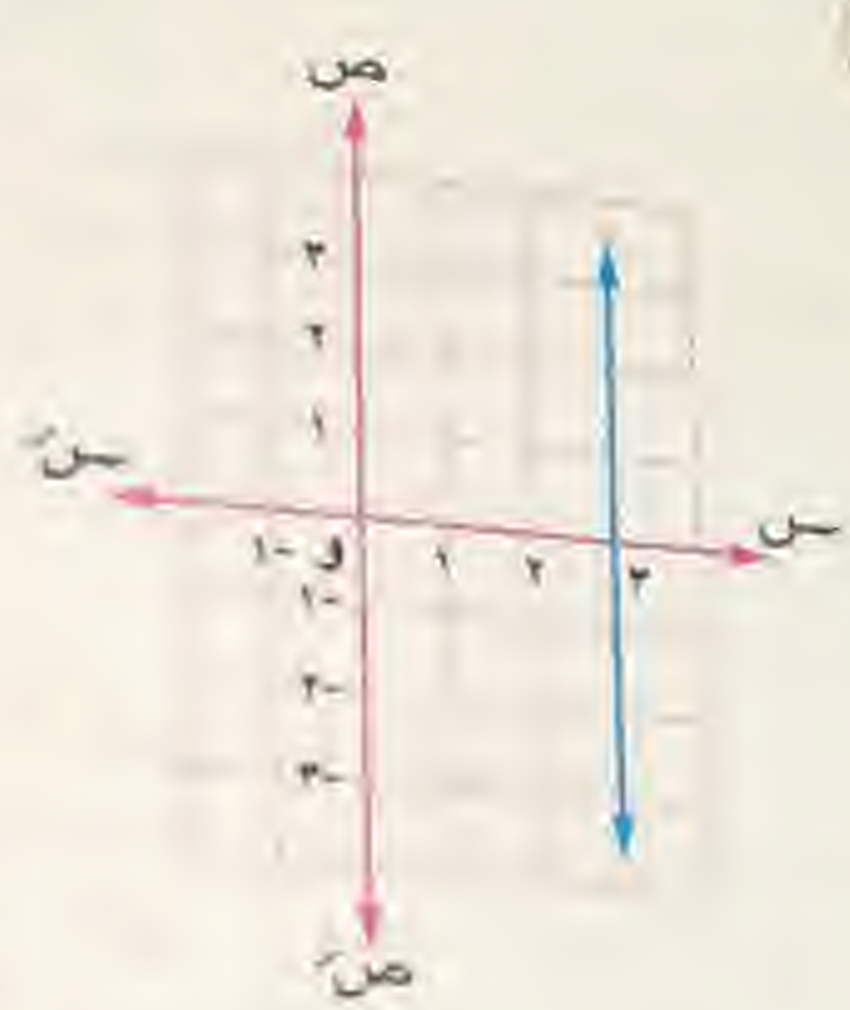
٨ إذا كان : (−٣ ، ٢) يحقق العلاقة : ٣ س + ب ص = ١ فأوجد قيمة : ب

٩ إذا كان : (٣ ، أ) يحقق العلاقة : ص − ٢ س = ٤ فأوجد قيمة : أ

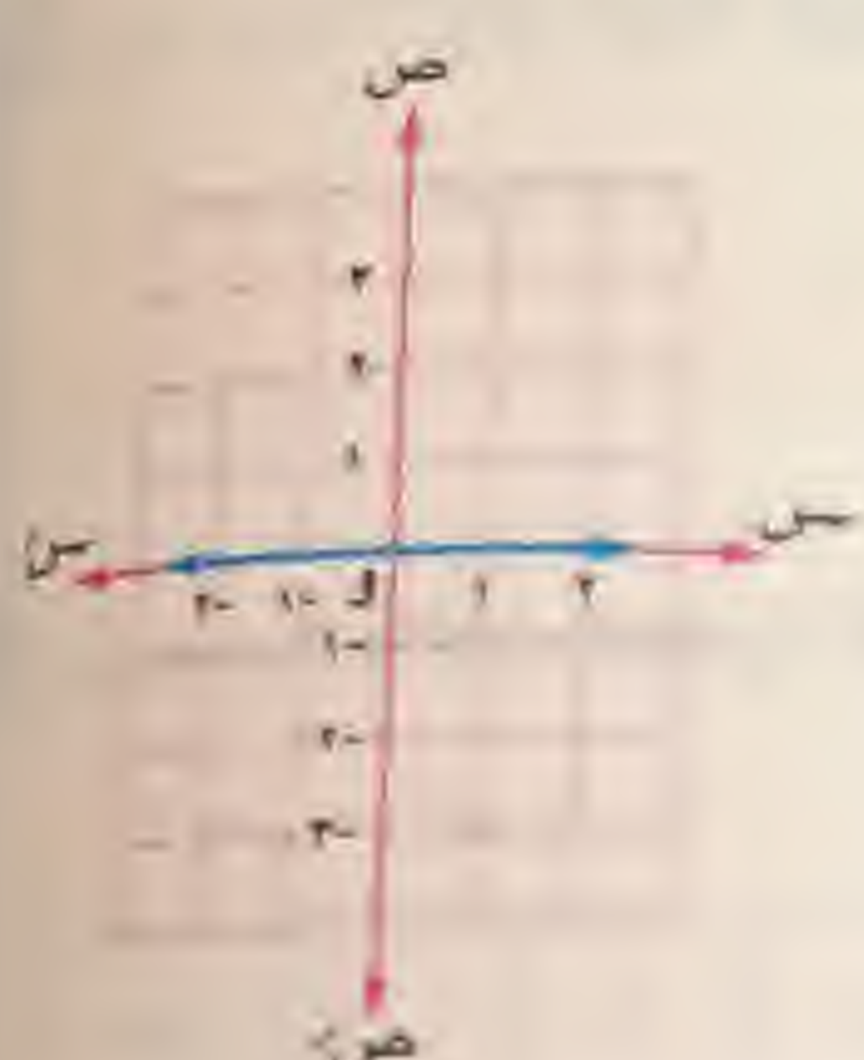
١٠ إذا كان : (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : س + ص = ١٥ فأوجد قيمة : ك

١١ أوجد العلاقة التى يمثلها الخط المستقيم فى كل من الشكلين الآتيين :

١



٢



١٢ مثل بيانيًا كلاً من العلاقات الآتية :

١ س + ص = ٢

٢ س − ص = ٣

٣ س + ٢ ص = ٣

٤ ص − ٣ س = ١

٥ ص = −٢ س

٦ ص − ٢ س + ١ = ٠

٧ ٢ س = ٥

٨ ص + ١ = ٠

١٣ مثل بيانيًا المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ٣ ص = ٦ وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أ ب حيث النقطة و هى نقطة الأصل.

٣ وحدة مربعة

١٤ إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة : ٢ س - ص = أ يقطع محور السينات فى النقطة (٣ ، ب)

فأوجد قيمة كل من : أ ، ب

١٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : (٢ ، -٥) يحقق العلاقة : ٣ س - ص + حـ = ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ١١ (د) -١١

٢ أى الأزواج المرتبة التالية يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥ ؟

(أ) (-١ ، ٣) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٢ ، ٢)

٣ (٣ ، ٢) لا يحقق العلاقة ....

(أ) ص + س = ٥

(ب) ٣ ص - س = ٣

(جـ) ص + س = ٧

(د) س - ص = ١

٤ النقطة (٣ ، ٥) تقع على المستقيم الذى يمثل العلاقة ....

(أ) ص = ٣ س - ٥

(ب) ٢ س - ص = ١

(جـ) ٣ س + ص = ١

(د) ص = ٣ س - ١

٥ إذا كان (-١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ١ (د) ١٠

٦ الجدول المقابل يمثل العلاقة بين س ، ص

س	١	٢	٣	٤
ص	-٢	-٥	-٨	-١١

أى مما يأتى يعبر عن هذه العلاقة ؟

(أ) س + ص = -١

(ب) س - ص = ٣

(جـ) ٣ س + ص = ١

(د) ص = - س - ٣

٧ الجدول المقابل يبين علاقة س ، ص

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

وهى ....

(أ) ص = س + ٤ (ب) ص = س + ١

(جـ) ص = ٢ س - ١ (د) ص = ٣ س - ٢

٨ العلاقة التى تعبر عن الزوجين المرتبين (٢ ، ١) ، (٤ ، ٣) معًا هى ....

(أ) ص = $\frac{١}{٢}$ س (ب) ص = ٢ س - ٥

(جـ) ص = س - ١ (د) ص = ٣ س + ٣

٩ العلاقة : ٢ س + ٨ ص = ٢٤ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ٨) (ب) (٨ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٣) (د) (٣ ، ٠)

١٠ العلاقة : ٢ س + ٧ ص = ١٤ يمثلها مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

(أ) (٢ ، ٠) (ب) (٠ ، ٢) (جـ) (٧ ، ٠) (د) (٠ ، ٧)

١١ صورة النقطة (٥ ، ٣) بالانعكاس فى المستقيم : س = ١ هى النقطة ....

(أ) (٥ ، -٣) (ب) (-٥ ، ٣) (جـ) (-٣ ، ٣) (د) (٦ ، ٣)

١٢ صورة النقطة (٤ ، -٢) بالانعكاس فى المستقيم : ص = ١ هى النقطة ....

(أ) (٤ ، ٢) (ب) (-٤ ، -٢) (جـ) (٤ ، -١) (د) (٤ ، ٤)

١٦ عددان طبيعيان زوجيان ضعف أولهما مضاف إليه ثانيهما يساوى ١٢

أوجد الإمكانات المختلفة للعددين.

تطبيق هندسى

١٧ مستطيل محيطه ١٤ سم ، ما الإمكانات المختلفة لكل من طوله وعرضه علمًا بأن كلاً منهما ∈ $ص_+$ ؟

تطبيقات حياتية

١٨ مع عصام ١٠ ورقات مالية فئة ٥ جنيهات ، وأوراق مالية فئة ٢٠ جنيهًا ، اشترى عصام من المركز التجارى بما قيمته ٦٥ جنيهًا ، حدد الإمكانات المختلفة لدفع هذا المبلغ باستخدام الأوراق المالية التى معه ، وأوجد العلاقة بين عدد كل منها ومثلها بيانيًا.

١٩ إذا كان ثمن طاولة الكمبيوتر ١٠٠ جنيه ، وثمن الكرسى ٥٠ جنيهًا ، فإذا باع المتجر فى أحد الأسابيع بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، فما هى التوقعات الممثلة لعدد الطاولات التى باعها ، وعدد الكراسى ؟ مثل هذه العلاقة بيانيًا.

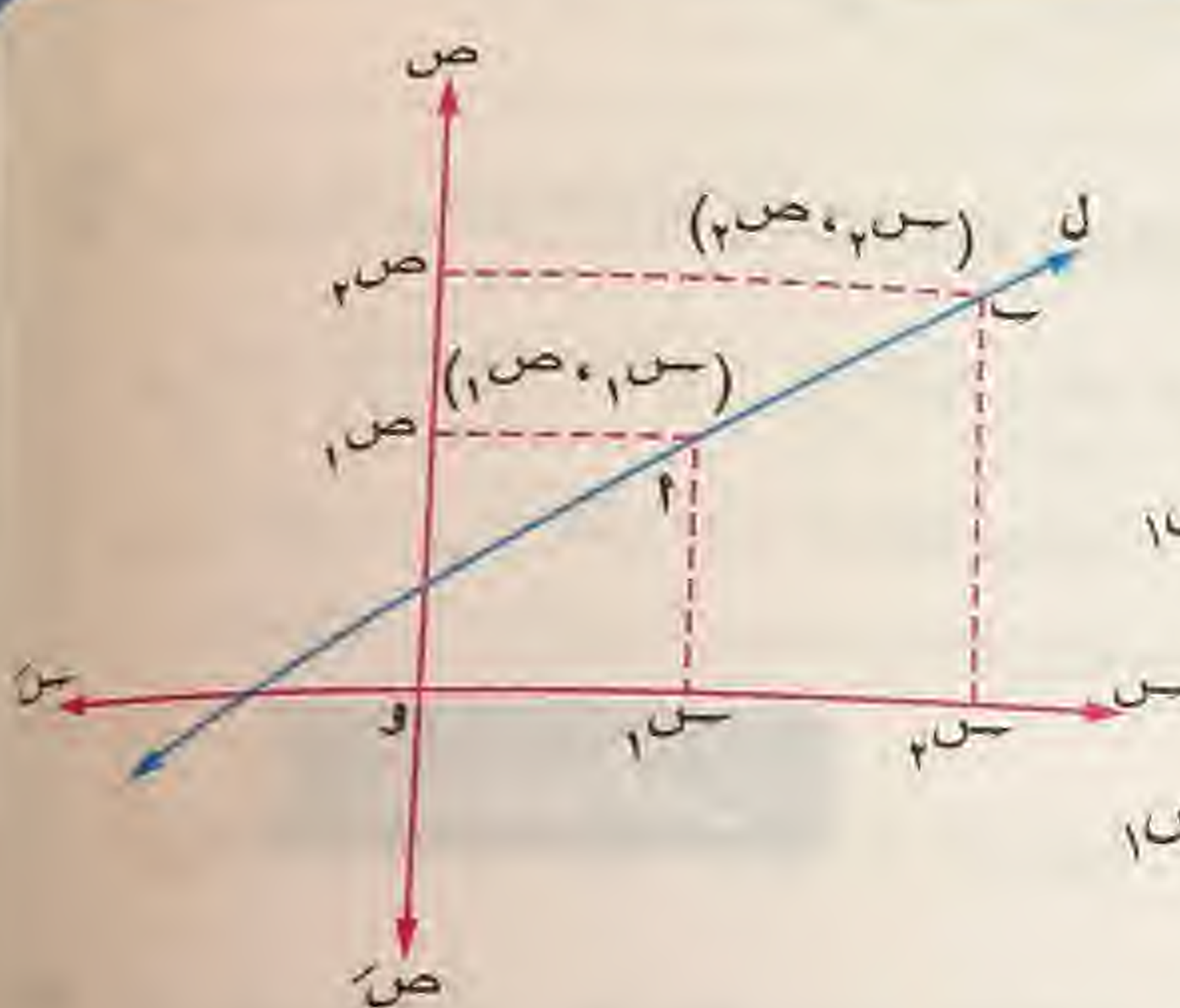
للمتفوقين

٢٠ مثلث متساوى الساقين محيطه ١٩ سم ، ما الإمكانات المختلفة لأطوال أضلاعه علمًا بأن أطوال أضلاعه ∈ $ص_+$ لاحظ أن : مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.



الدرس 2

ميل الخط المستقيم



• إذا تحركت نقطة على خط مستقيم ل من الموضع أ (س$_1$ ، ص$_1$) إلى الموضع ب (س$_2$ ، ص$_2$) فإن :

* التغير فى الإحداثى السينى = س$_2$ − س$_1$ ، ويُسمى بالتغير الأفقى.
* التغير فى الإحداثى الصادى = ص$_2$ − ص$_1$ ، ويُسمى بالتغير الرأسى.

والنسبة بين التغير فى الإحداثى الصادى والتغير فى الإحداثى السينى تُسمى ميل الخط المستقيم ويرمز له بالرمز (م)

تعريف

ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$ أى أن :

• م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث س$_1$ ≠ س$_2$

• م غير معرف إذا كان : س$_1$ = س$_2$

مثال ١

فى الشكل المقابل :

أوجد ميل الخط المستقيم ل



الحل

نعين نقطتين على المستقيم ل وليكن أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٣)

$\because$ م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ $\therefore$ م = $\frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$

ملاحظة

فى المثال السابق : لاحظ أننا إذا استخدمنا نقطتين أخريين من نقط المستقيم لإيجاد ميله

مثل : حـ (−٣ ، صفر) ، ء (−١ ، ١)

نجد أن : م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{1 - \text{صفر}}{-1 - (-3)} = \frac{1}{2}$ وهى نفس النتيجة السابقة.

أى أن : ميل المستقيم ثابت ولا يتوقف على اختيارنا لأى نقطتين عليه.

مثال ٢

أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

١ (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٥)

٢ (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢)

٣ (−٢ ، −٣) ، (−٤ ، ١)

٤ (٣ ، ١) ، (−١ ، ٠)

الحل

١ م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{5 - 4}{4 - 2} = \frac{1}{2}$

٢ م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{2 - 3}{4 - 1} = \frac{-1}{3}$

٣ م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{1 - (-3)}{-4 - (-2)} = \frac{4}{-2} = -2$

٤ م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{0 - 1}{-1 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

حاول بنفسك ١

أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

١ (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤)

٢ (٣ ، −٥) ، (−٤ ، ٢)

٣ (−٣ ، −١) ، (١ ، ٠)

٤ (−٦ ، ٣) ، (−٤ ، ٢)

ملاحظة

• إذا تحركت نقطة على خط مستقيم من الموضع أ ($س_١$ ، $ص_١$) إلى الموضع ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) بحيث كان $س_٢ > س_١$ فإن :

١



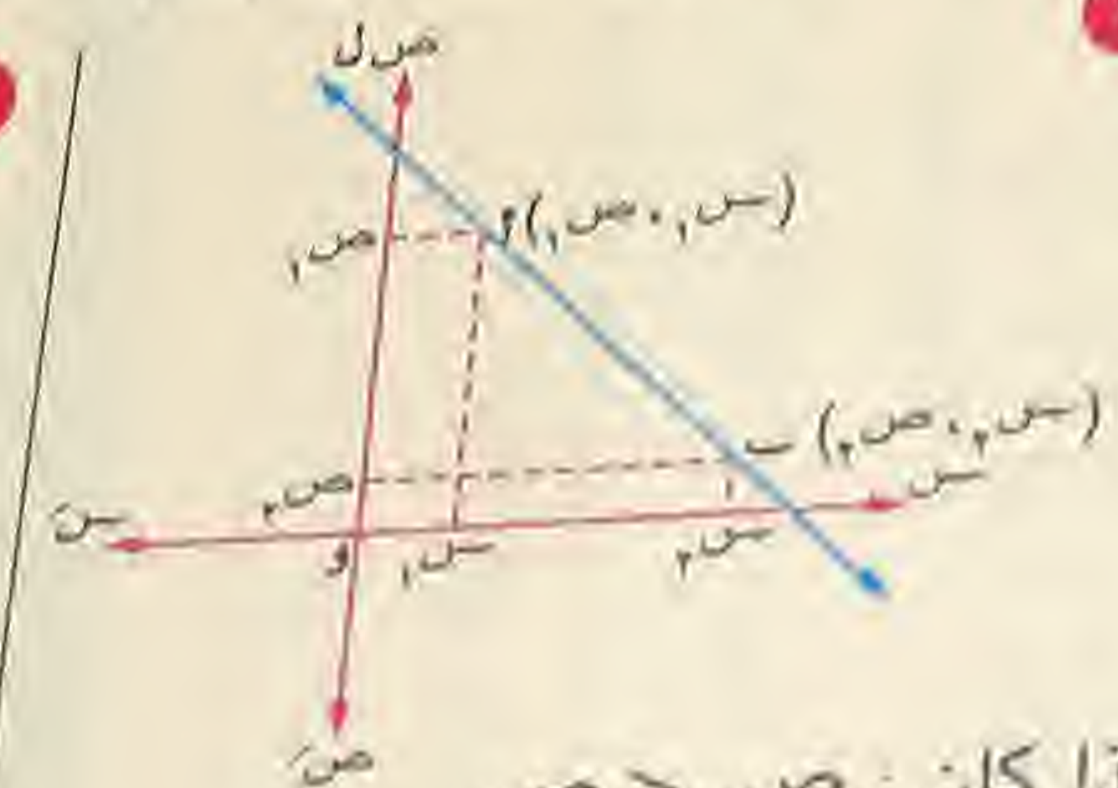
إذا كان : $ص_٢ > ص_١$

أى أن : ص تزداد بزيادة س

فإن : ميل المستقيم = عدد موجب

أى أن : م > ٠

٢



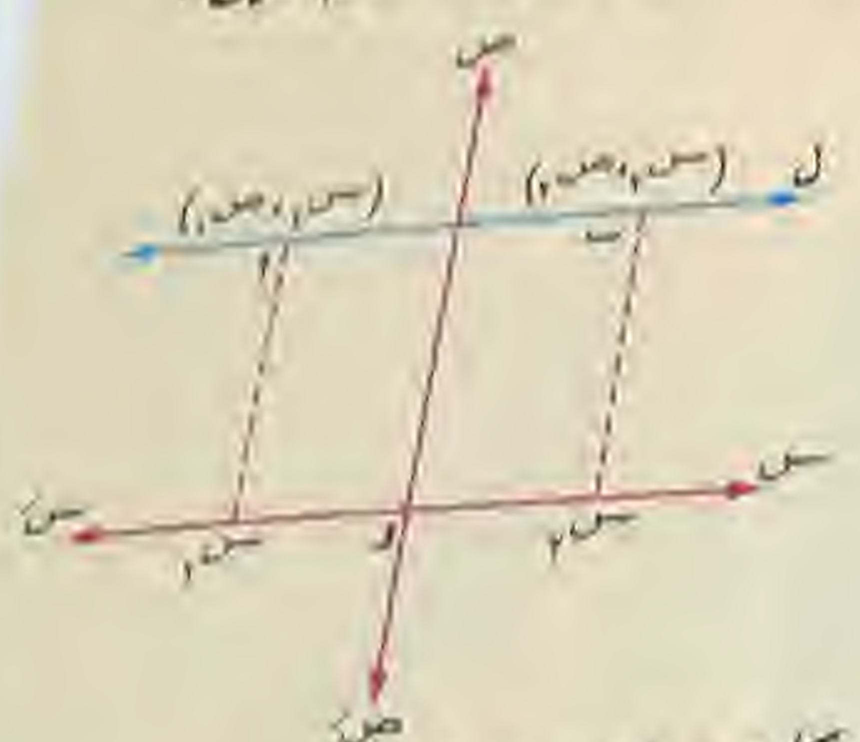
إذا كان : $ص_٢ < ص_١$

أى أن : ص تقل بزيادة س

فإن : ميل المستقيم = عدد سالب

أى أن : م < ٠

٣



إذا كان : $ص_٢ = ص_١$

أى أن : ص ثابتة بتغير س

فإن : ميل المستقيم = ٠ أى أن : م = ٠

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ٠

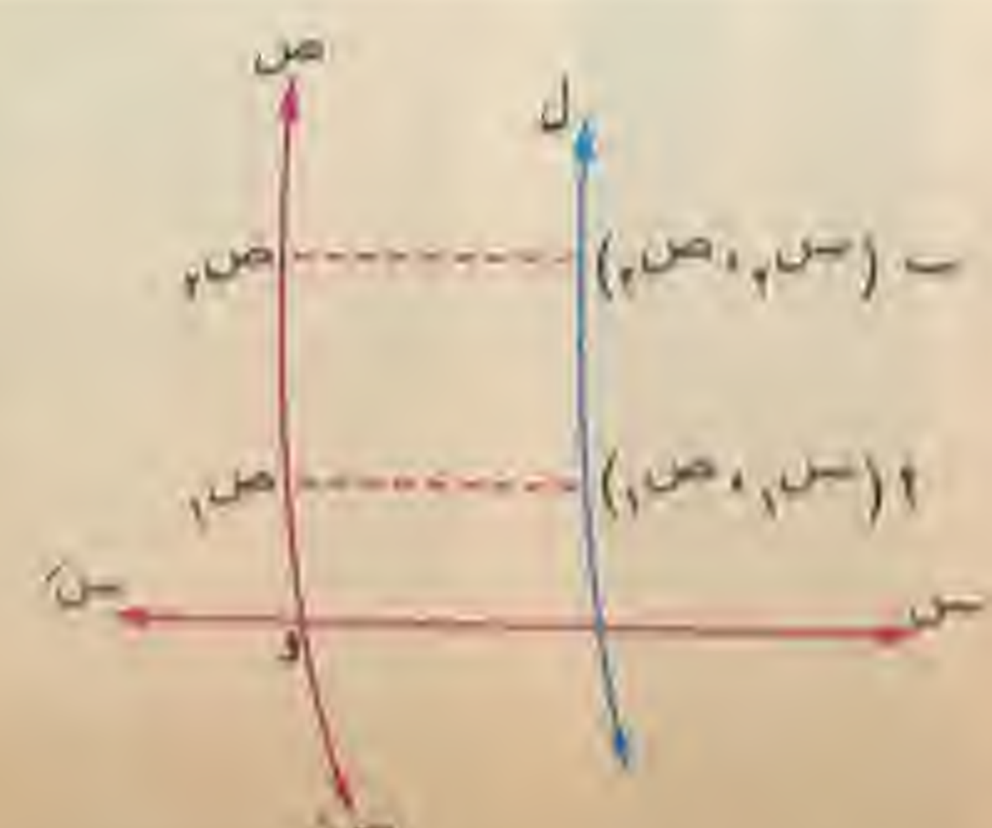
• إذا كان : $س_٢ = س_١$

فإن : ميل المستقيم غير معرف

لأنه لا يوجد تغير فى الإحداثى السينى

أى : $س_٢ - س_١ = ٠$

أى أن : ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف.



مثال ٣

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه ب حـ // س س َ ، أ ء ⊥ ب حـ

أكمل كلاً مما يأتى بوضع إحدى الكلمات

(موجب ، سالب ، صفر ، غير معرف) مكان النقط :



١ ميل أ ب .... ٢ ميل ب حـ ....

٣ ميل أ حـ .... ٤ ميل أ ء ....

الحــل

١ سالب. ٢ صفر. ٣ موجب. ٤ غير معرف.

مثال ٤

إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٣ ، ٤) ، (١ ، ص) هو ٢ فأوجد قيمة : ص

الحــل

$$\because م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \qquad \therefore ٢ = \frac{ص - ٤}{١ - (-٣)} \qquad \therefore ٢ = \frac{ص - ٤}{٤}$$

$$\therefore ص - ٤ = ٢ \times ٤ \qquad \therefore ص - ٤ = ٨ \qquad \therefore ص = ١٢$$

ملاحظة هامة

وجدنا مما سبق أن ميل أى مستقيم ثابت ولا يتوقف على اختيارنا لأى نقطتين عليه ومن ذلك لإثبات أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة فإننا نوجد ميل أ ب ، ميل ب حـ فإذا كان ميل أ ب = ميل ب حـ فإن : أ ، ب ، حـ تكون على استقامة واحدة.

مثال ٥

أثبت أن النقط : أ (٢ ، ٣) ، ب (٤ ، ٢) ، حـ (٨ ، ٠) تقع على استقامة واحدة.

الحل

$\because$ م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{٢ - ٣}{٤ - ٢} = \frac{-١}{٢}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب ح} = \frac{٠ - ٢}{٨ - ٤} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

$\because$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب ح}$ وهما مشتركان فى نقطة ب

$\therefore$ النقط أ ، ب ، ح تقع على استقامة واحدة.

مثال ٦

إذا كانت النقط أ ، ب ، ح تقع على مستقيم واحد حيث :

أ(٣ ، ٢) ، ب(٥ ، -١) ، ح(١ ، ك) فأوجد قيمة : ك

الحل

$\because$ م $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{-١ - ٢}{٥ - ٣} = \frac{-٣}{٢}$ ، ميل $\overleftrightarrow{ب ح} = \frac{ك + ١}{١ - ٥} = \frac{ك + ١}{-٤}$

$\because$ أ ، ب ، ح تقع على مستقيم واحد ، ميل المستقيم ثابت لأى زوج من النقط يقع عليه

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{ب ح}$ $\therefore \frac{-٣}{٢} = \frac{ك + ١}{-٤}$ $\therefore$ ٢ (ك + ١) = -٣ × (-٤)

$\therefore$ ٢ ك + ٢ = ١٢ $\therefore$ ٢ ك = ١٠ $\therefore$ ك = ٥

حاول بنفسك ٢

١ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -١) ، (٧ ، أ) هو $\frac{٣}{٤}$ فأوجد قيمة : أ

٢ أثبت أن : ح(-١ ، ٢) $\in \overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ(١ ، ٣) ، ب(٣ ، ٤)

تمارين 12

على ميل الخط المستقيم

اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

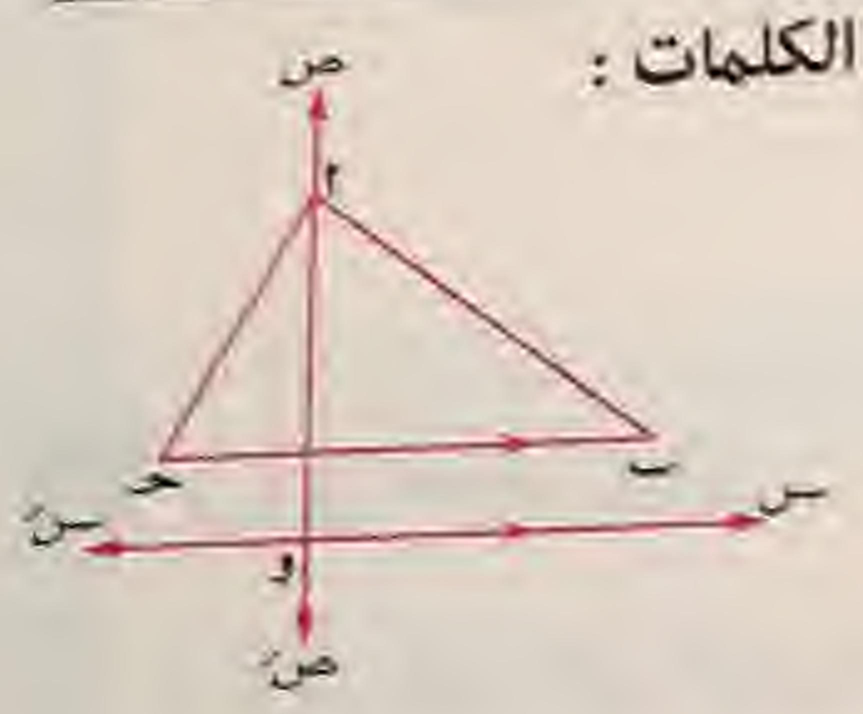
١ صنف ميل المستقيم فى كل من الأشكال الآتية بأنه (موجب - سالب - صفر - غير معرف) :



شكل(١) شكل(٢) شكل(٣) شكل(٤)

٢ فى الشكل المقابل المثلث أ ب حـ أكمل باستخدام إحدى الكلمات :

(موجب أ، سالب أ، صفر أ، غير معرف)



١ ميل $\overleftrightarrow{أب}$ ....
٢ ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ....
٣ ميل $\overleftrightarrow{أو}$ ....
٤ ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ ....

٣ أكمل ما يأتى :

١ ميل أى مستقيم أفقى يساوى ....

٢ ميل أى مستقيم يوازى محور الصادات ....

٣ المستقيم الذى ميله = صفر يكون موازيًا لمحور ....

٤ إذا كانت : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة فإن : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل ....

٤ أوجد ميل المستقيم المار بكل نقطتين مما يأتى :

١ أ(١ ، ٣) ، ب(٣ ، ٤)
٢ أ(١ ، ٢) ، ب(٥ ، ٠)
٣ أ(٣ ، ٢) ، ب(٦ ، ٥)
٤ أ(٢ ، -١) ، ب(٤ ، -١)
٥ أ(١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٣)
٦ أ(٥ ، ٢) ، ب(٥ ، ٤)

٧) أ (٢ ، -١) ، ب (٣ ، ٢)

٨) أ (٣ ، -٢) ، ب (٤ ، ١)

٩) أ (-١ ، ٣) ، ب (٢ ، ١)

١٠) ن (٤ ، -٢) ، ك (-١ ، -١

١١) هـ (-٣ ، -١) ، و (٠ ، ٠)

١٢) أ (-٦ ، -٩) ، ب (-١ ، -١

٥ أوجد ميل المستقيم ل فى كل من الشكلين الآتيين :

١)



٢)



٦ فى الشكل المقابل :

ل م ن مثلث قائم الزاوية فى ل

، ق(∠ م) = ٤٥°

فإذا كان : ل (٣ ، ٢) ، م (٧ ، ٢)

أوجد إحداثيى ن

واحسب ميل $\overleftrightarrow{من}$



٧ إذا كانت : أ (٢ ، -١) ، ب (١٠ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٣)

أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـأ}$ ، وارسم المثلث أ ب حـ على الشبكة التربيعية

، ثم حدد نوع المثلث أ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه.

٨ إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٣ ، ك) يساوى ٢

فأوجد قيمة : ك

٩ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، حـ) ، (٥ ، -٢) يساوى -٣

فأوجد قيمة : حـ

«٤»

١٠ إذا كان : أ (-١ ، ٤) ، ب (س ، ٢) وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = -٢

فأوجد قيمة : س

«صفر»

١١ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقطتين (-٢ ، ص) ، (٣ ، -١) ميله = -٦,٠

فأوجد قيمة : ص

«٢»

١٢ أوجد قيمة ك بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (٢ ، ك)

موازيًا محور السينات.

«٤»

١٣ أوجد قيمة س بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٢ س ، ٣) ، (٦ ، ٧)

موازيًا محور الصادات.

«٣»

١٤ أوجد قيمة ص بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٦) ، (-٢ ، ٣ ص)

عموديًا على محور الصادات.

«٢»

١٥ هل تقع النقاط (-٥ ، ١١) ، (٠ ، ٨) ، (٥ ، ٥) على نفس الخط المستقيم ؟

١٦ إذا كانت : أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٥)

أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ومثل كلًا منها بيانيًا ماذا تلاحظ ؟

١٧ فى كل مما يأتى أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة :

١ أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (-٣ ، -٣)

٢ أ (٤ ، -٣) ، ب (-٦ ، ٧) ، حـ (٥ ، -٤)

٣ أ (-٢ ، ١٢) ، ب (٢ ، ٤) ، حـ (٦ ، -٤)

١٨ فى كل مما يأتى أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ لا تقع على استقامة واحدة :

١ أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٠) ، حـ (٥ ، −١)

٢ أ (−١ ، ٢) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (٧ ، ٢)

٣ أ (٠ ، −٣) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (−٣ ، −٣)

١٩ أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ حيث : أ (−١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥)

، هل النقطة حـ (٨ ، ١) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ؟

٢٠ أوجد ص بحيث تكون النقط (٤ ، ١) ، (−٢ ، ٧) ، (٣ ، ص) على استقامة واحدة.

للمتفوقين

٢١ إذا كان المستقيم الذى يمر بالنقط (٣ ، −١) ، (س ، ١) ، (٩ ، ص) ميله = $\frac{٢}{٣}$

فأوجد قيمة كل من : س ، ص



الدرس 3

تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

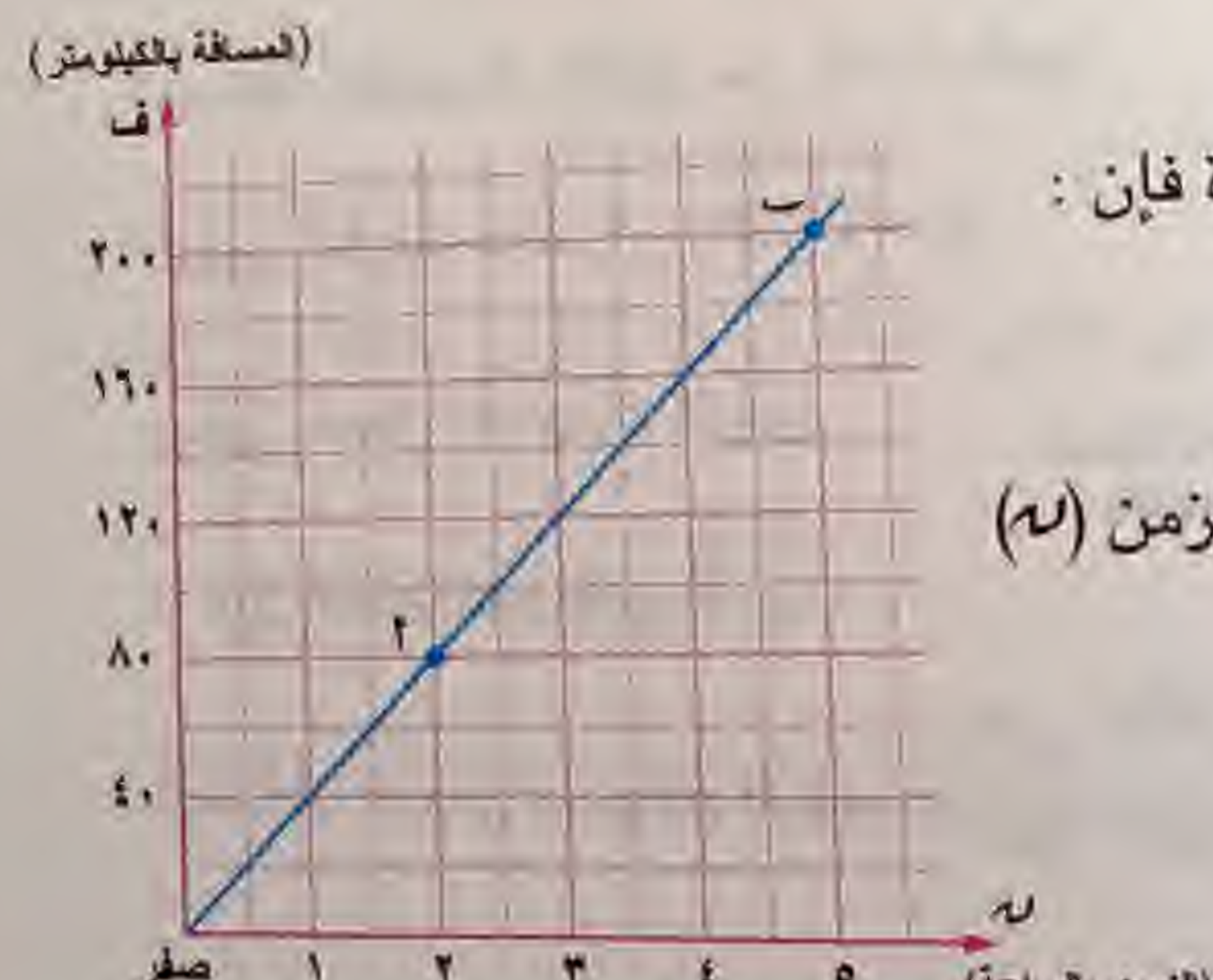
درسنا فيما سبق أنه : إذا كانت هناك علاقة خطية بين متغيرين س ، ص فإن :

ميل الخط المستقيم الذى يمثل هذه العلاقة $= \dfrac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}}$

أى أن : ميل الخط المستقيم (م) يعبر عن معدل التغير فى ص بالنسبة إلى س

ويوجد فى حياتنا العديد من التطبيقات التى نحتاج فيها لمعرفة معدل التغير :

فمثلاً :



1 إذا كان الشكل المقابل يمثل حركة سيارة فإن :

السرعة المنتظمة للسيارة (ع)

= معدل التغير فى المسافة (ف) بالنسبة للزمن (ن)

أى أن :

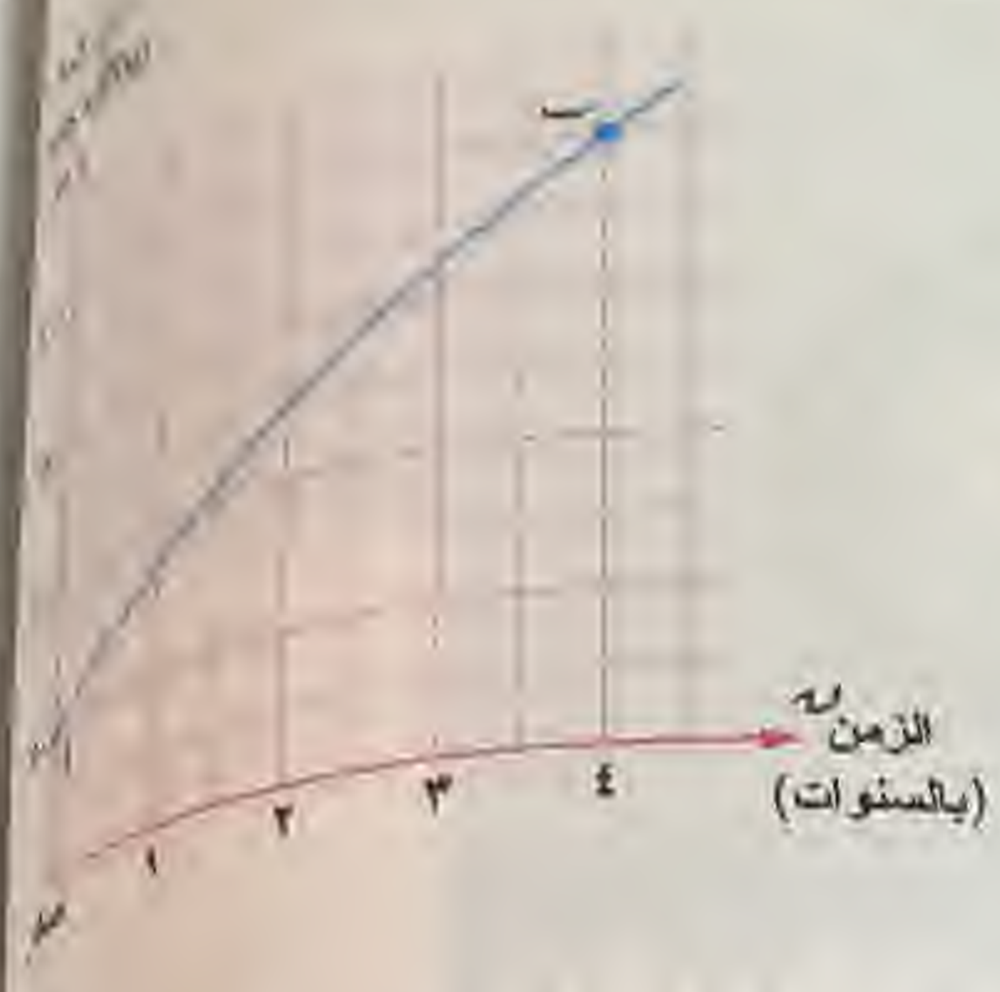
السرعة المنتظمة للسيارة (ع)

= ميل الخط المستقيم (م)

وباختيار نقطتين على المستقيم مثل أ (٢ ، ٨٠) ، ب (٥ ، ٢٠٠)

$\therefore$ ع $= \dfrac{\text{ف}_2 - \text{ف}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1} = \dfrac{٢٠٠ - ٨٠}{٥ - ٢} = \dfrac{١٢٠}{٣} =$ ٤٠ كم/ساعة

٢ إذا كان الشكل المقابل يمثل التغير فى رأس مال إحدى الشركات (ص) بمرور الزمن (ن) فإن :



معدل التغير فى رأس مال الشركة

= ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

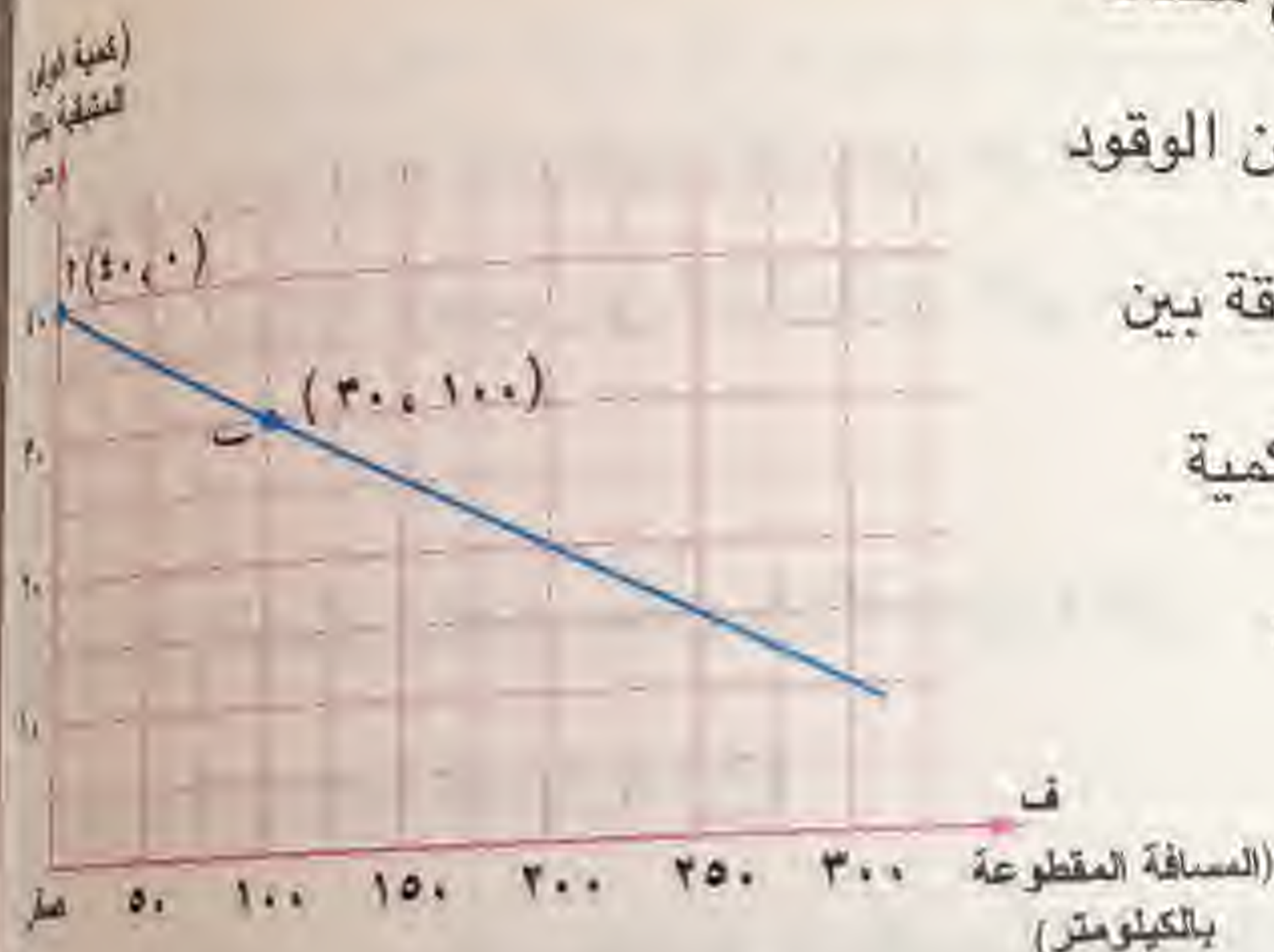
∴ معدل التغير فى رأس المال

$$= \frac{ص_2 - ص_1}{ن_2 - ن_1} = \frac{٢٠٠ - ٥٠}{٤ - ٠} = \frac{١٥٠}{٤}$$

= ٣٧,٥ ألف جنيه/سنة.

أى أن : رأس مال الشركة يتزايد بمعدل = ٣٧,٥ × ١٠٠٠ = ٣٧٥٠٠ جنيه سنويًا.

٣ إذا ملأ أحد الأشخاص خزان سيارته الذى سعته ٤٠ لترًا بالوقود وبعد أن قطع مسافة ١٠٠ كم وجد أن المتبقى بالخزان من الوقود ٣٠ لترًا والشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة المقطوعة بالكيلو متر (ف) وكمية الوقود المتبقية بالخزان باللتر (ص) :



ويكون معدل استهلاك الوقود

= ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

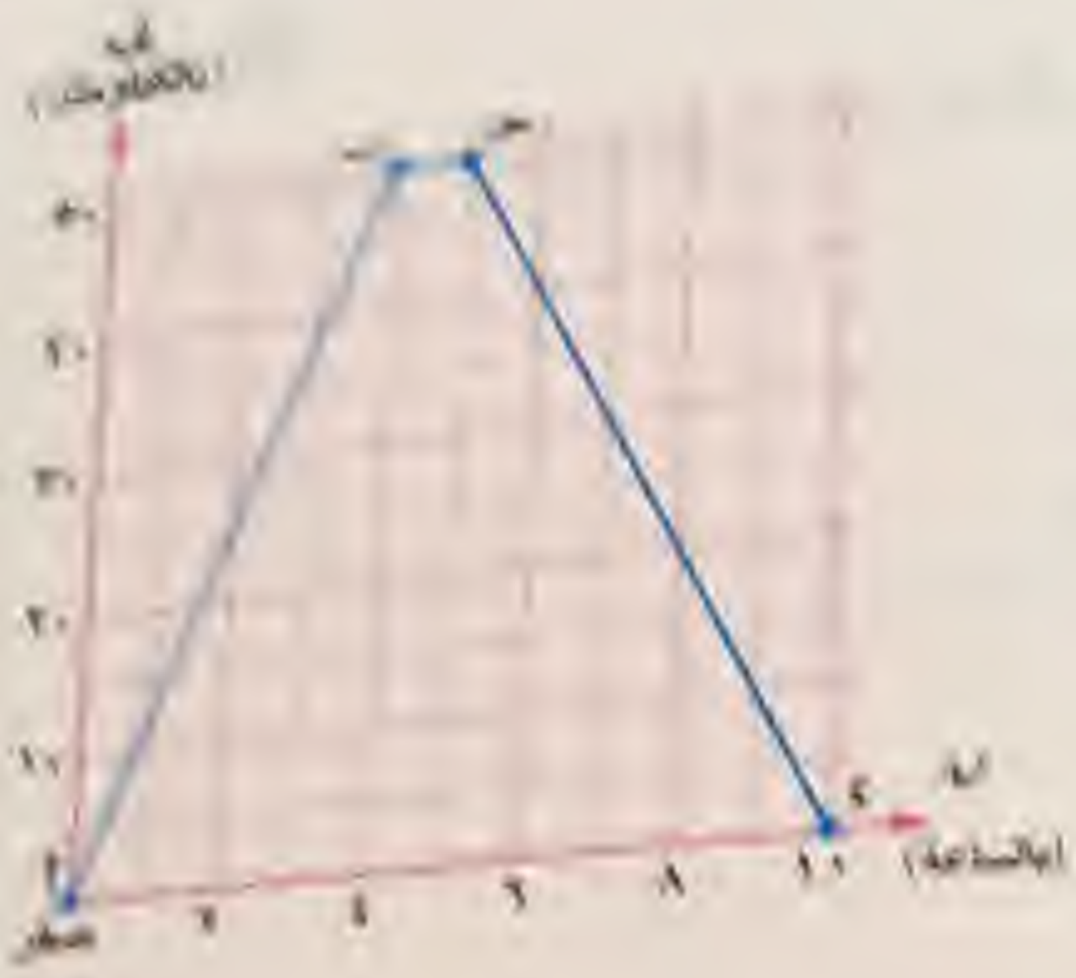
أى أن : معدل استهلاك الوقود $= \frac{ص_2 - ص_1}{ف_2 - ف_1} = \frac{٣٠ - ٤٠}{١٠٠ - ٠}$

$= \frac{-١٠}{١٠٠} = -\frac{١}{١٠}$ لتر/كيلو متر.

والإشارة السالبة تدل على أن كمية الوقود تتناقص بالخزان بمعدل واحد لتر لكل ١٠ كم

مثال ١

تحرك وليد بدراجته من مدينة القاهرة إلى مدينة ... ثم عاد إلى القاهرة ، والشكل البيانى المقابل يمثل حركته خلال رحلتى الذهاب والعودة.



١ أوجد سرعته خلال رحلة الذهاب.

٢ أوجد سرعته خلال رحلة العودة.

٣ أوجد السرعة المتوسطة له أثناء الرحلة كلها.

٤ بماذا تفسر القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل ؟

الحل

١ بأخذ النقطتين ا (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٥٠)

$\therefore$ ع (خلال رحلة الذهاب) = $\frac{٥٠ - ٠}{٤ - ٠}$ = ١٢٫٥ كم/ ساعة.

٢ بأخذ النقطتين حـ (٥ ، ٥٠) ، ء (١٠ ، ٠)

$\therefore$ ع (خلال رحلة العودة) = $\frac{٠ - ٥٠}{١٠ - ٥}$ = $\frac{-٥٠}{٥}$ = -١٠ كم/ ساعة.

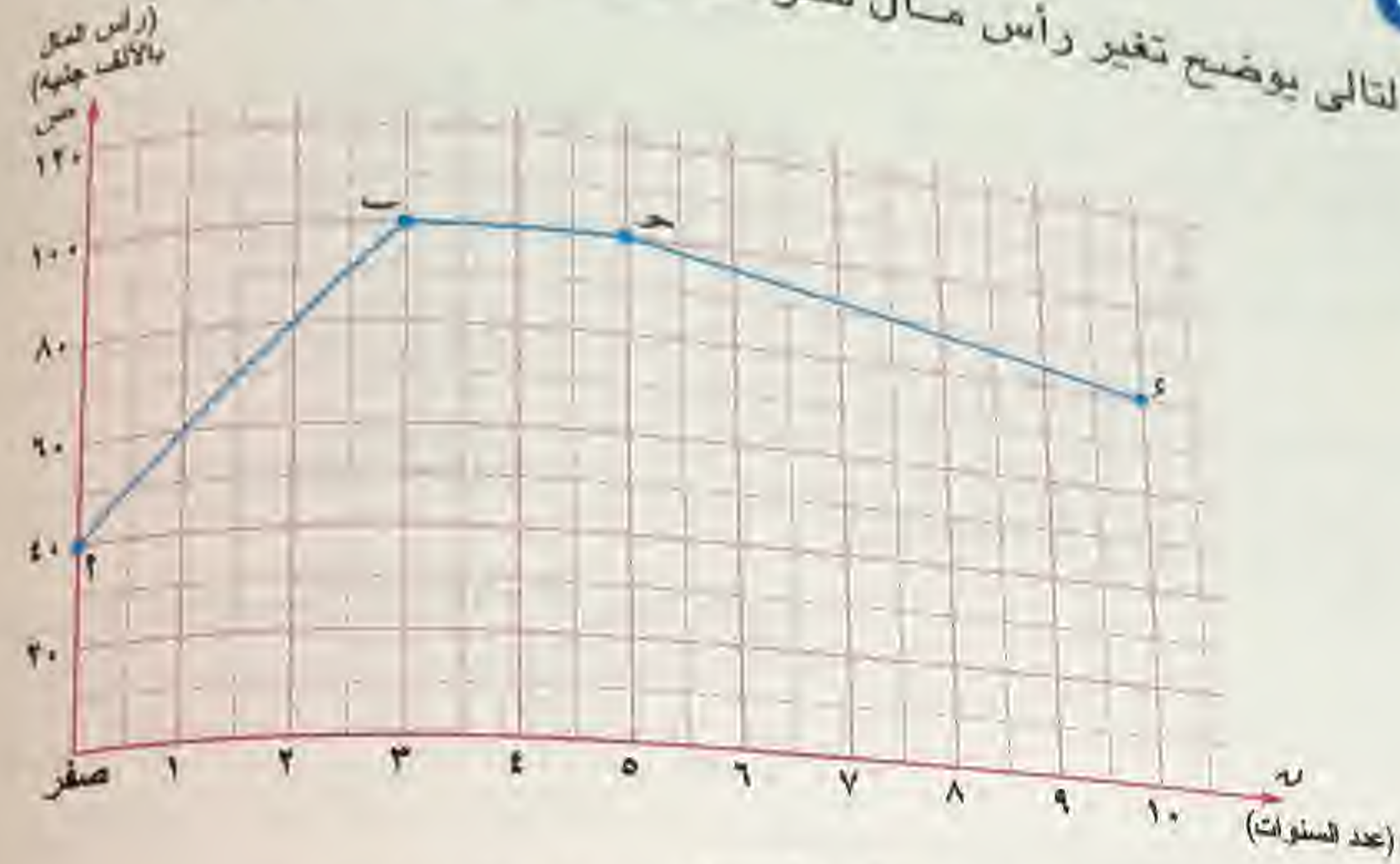
والإشارة السالبة تعنى أن وليد تحرك فى عكس اتجاه حركته الأولى عائدًا إلى القاهرة بسرعة ١٠ كم/ ساعة.

٣ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى الذى قطعت فيه المسافة}}$ = $\frac{١٠٠}{١٠}$ = ١٠ كم/ ساعة.

٤ القطعة المستقيمة الأفقية تبين أن وليد توقف لمدة ساعة بعد أن سار مسافة ٥٠ كم ثم سار بعد ذلك راجعًا إلى نقطة البدء.

مثال ٢

الشكل التالى يوضح تغير رأس مال شركة ما خلال ١٠ سنوات.



١ أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ما دلالة كل منها ؟

٢ احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها.

الحل

∵ أ(٠ ، ٤٠) ، ب(٣ ، ١٠٠) ، حـ(٥ ، ١٠٠) ، ء(١٠ ، ٨٠)

١ • ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١٠٠ - ٤٠}{٣ - ٠} = \frac{٦٠}{٣} = ٢٠$

وهو يعبر عن تزايد رأس مال الشركة خلال الثلاث سنوات الأولى من بدء عملها بمعدل ٢٠٠٠٠ جنيه كل عام.

• ميل $\overleftrightarrow{ب حـ}$ = $\frac{١٠٠ - ١٠٠}{٥ - ٣} = \frac{٠}{٢} = ٠$

وهو يعبر عن أن رأس مال الشركة ظل ثابتًا بدون زيادة أو نقصان خلال السنتين الرابعة والخامسة من بدء عملها.

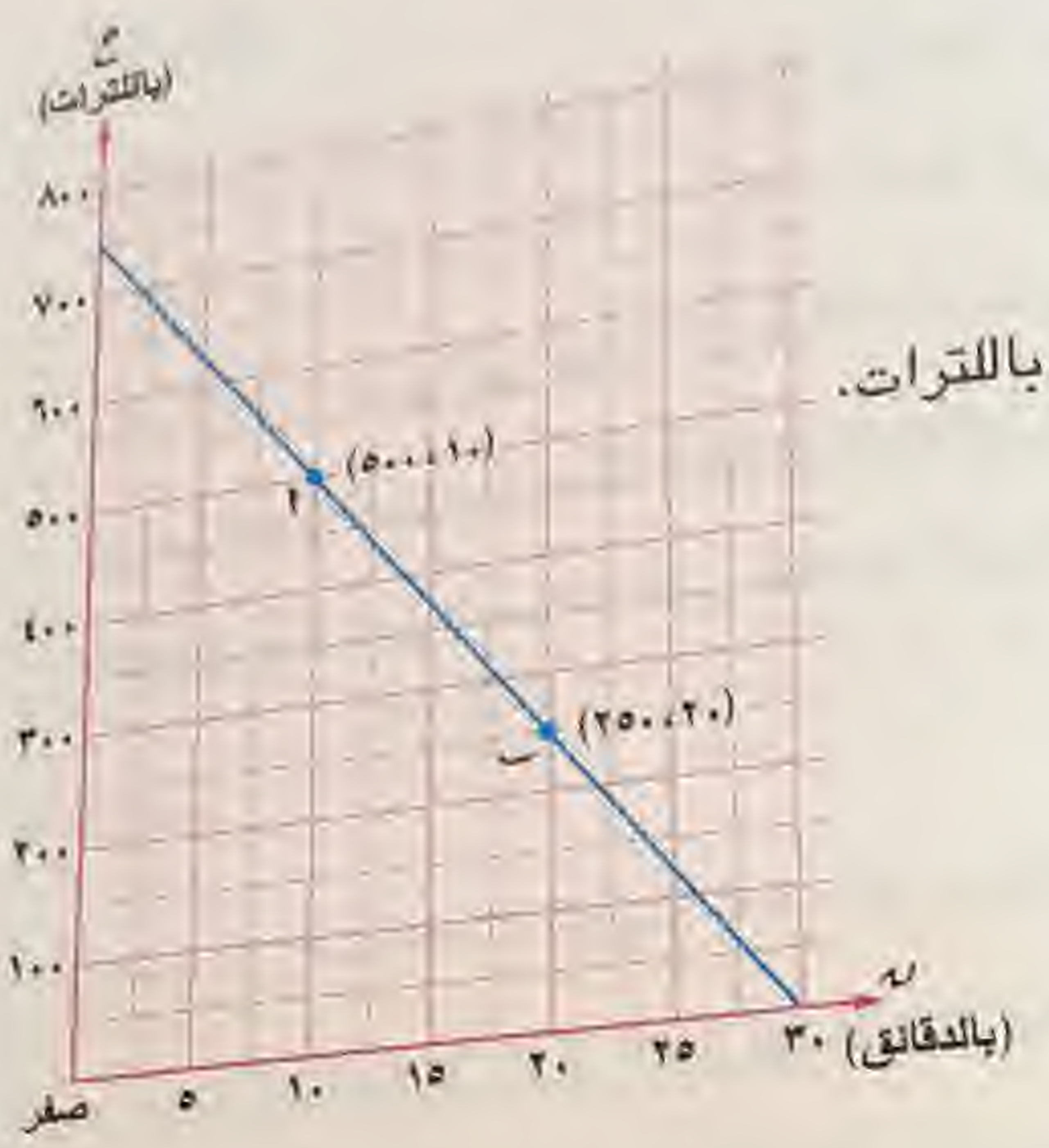
• ميل $\overleftrightarrow{حـ ء}$ = $\frac{٨٠ - ١٠٠}{١٠ - ٥} = \frac{-٢٠}{٥} = -٤$

وهو يعبر عن تناقص رأس مال الشركة خلال الخمس سنوات الأخيرة بمعدل ٤٠٠٠ جنيه كل عام.

٢ ∵ أ(٠ ، ٤٠) ∴ رأس مال الشركة عند بدء عملها = ٤٠٠٠٠ جنيه.

مثال ٣

خزان مياه مملوء بأسفله صنبور مفتوح والشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (ن) بالدقائق وكمية المياه المتبقية فى الخزان (ح) باللترات.



١ ما هى أكبر سعة للخزان ؟

٢ ما هو الزمن اللازم ليفرغ الخزان ؟

٣ كم يتبقى فى الخزان بعد ٢٠ دقيقة ؟

٤ ما هو متوسط تفريغ الخزان ؟

الحل

١ من الرسم البيانى نجد أن :

$\overleftrightarrow{أب}$ يقطع المحور الذى يمثل كمية المياه المتبقية بالخزان (ح) فى النقطة (٠ ، ٧٥٠)

∴ أكبر سعة للخزان = ٧٥٠ لترًا.

٢ من الرسم البيانى نجد أن : $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع المحور الذى يمثل الزمن (ن) فى النقطة (٣٠ ، ٠)

∴ الزمن اللازم لكى يفرغ الخزان = ٣٠ دقيقة.

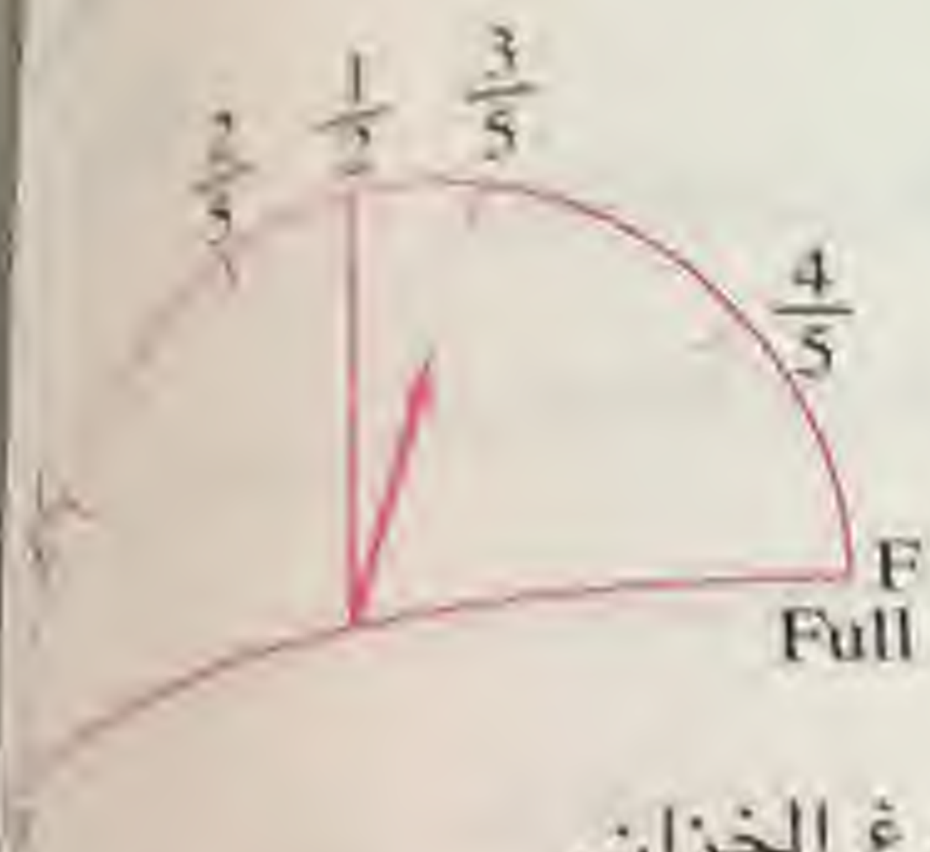
٣ ∵ النقطة (٢٠ ، ٢٥٠) $\in \overleftrightarrow{أب}$

∴ بعد ٢٠ دقيقة يتبقى فى الخزان ٢٥٠ لترًا.

٤ متوسط تفريغ الخزان = ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{ح_٢ - ح_١}{ن_٢ - ن_١} = \frac{٢٥٠ - ٥٠٠}{٢٠ - ١٠} = \frac{-٢٥٠}{١٠} = -٢٥$

∴ الخزان يفرغ بمعدل = ٢٥ لتر/دقيقة.

مثال ٤



ملأ حسام خزان سيارته بالوقود وسعته ٥٠ لترًا ، وبعد أن قطع مسافة ٢٠٠ كم ، لاحظ أن مؤشر عداد الوقود يشير إلى أن به $\frac{٣}{٥}$ سعته. ارسم الشكل البيانى للعلاقة بين المسافة المقطوعة وكمية الوقود بالخزان واحسب المسافة التى تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان.

الحـــل

نفرض أن المسافة المقطوعة = ف كم ، وكمية الوقود المتبقية بالخزان = ص لتر

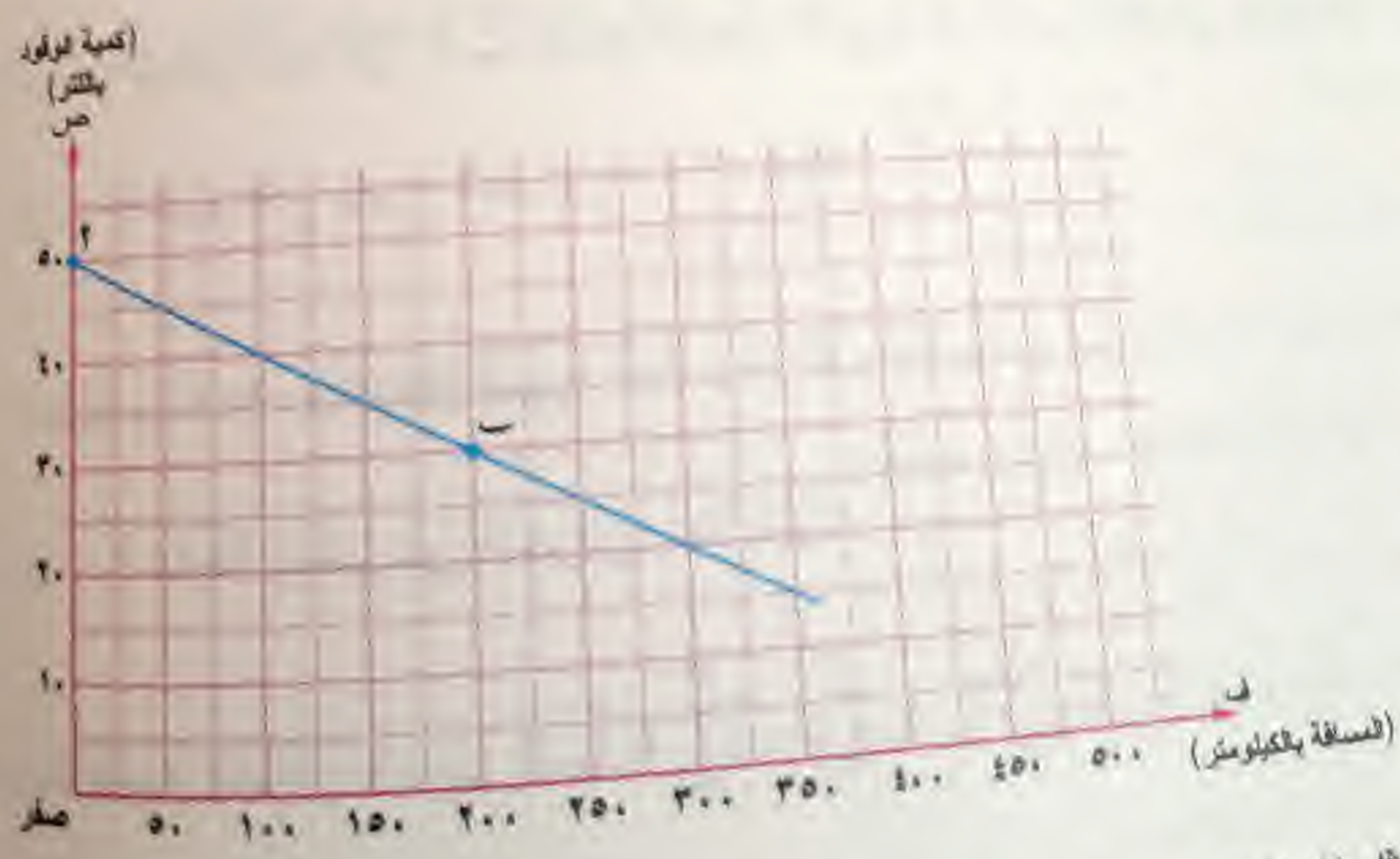
∴ عند بدء الحركة تكون المسافة المقطوعة = ٠ كم أى ف = ٠

، كمية الوقود المتبقية = ٥٠ لترًا أى ص = ٥٠

∴ النقطة أ (٠ ، ٥٠) تعبر عن كمية الوقود الموجودة بالخزان عند بدء الحركة

، ∵ $\frac{٣}{٥}$ سعة الخزان = $\frac{٣}{٥}$ × ٥٠ = ٣٠ لترًا

∴ النقطة ب (٢٠٠ ، ٣٠) تعبر عن كمية الوقود المتبقية بالخزان بعد قطع مسافة ٢٠٠ كم من بدء الحركة.



∴ $\overleftrightarrow{أب}$ يمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة (ف) وكمية الوقود المتبقية بالخزان (ص)

∴ معدل النقص فى الوقود = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{ف_٢ - ف_١}$ = $\frac{٣٠ - ٥٠}{٢٠٠ - ٠}$ = $\frac{-٢٠}{٢٠٠}$

= $\frac{-١}{١٠}$ لتر/ كيلو متر.

أى أن: كمية الوقود بالخزان تنقص بمعدل لتر واحد لكل ١٠ كيلو مترات.

∴ المسافة المقطوعة من بدء الحركة حتى يفرغ الخزان

$\frac{\text{كمية الوقود بالخزان عند بدء الحركة}}{\text{معدل النقص فى الوقود}}$ = $\frac{٥٠}{\frac{١}{١٠}}$ = ٥٠ × ١٠ = ٥٠٠ كيلو متر.

ملاحظة

يمكن إيجاد المسافة المقطوعة من بدء الحركة حتى يفرغ الخزان من الرسم البيانى عن طريق إيجاد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{أب}$ مع المحور الذى يمثل المسافة (ف) فنجد أنها (٥٠٠ ، ٠)

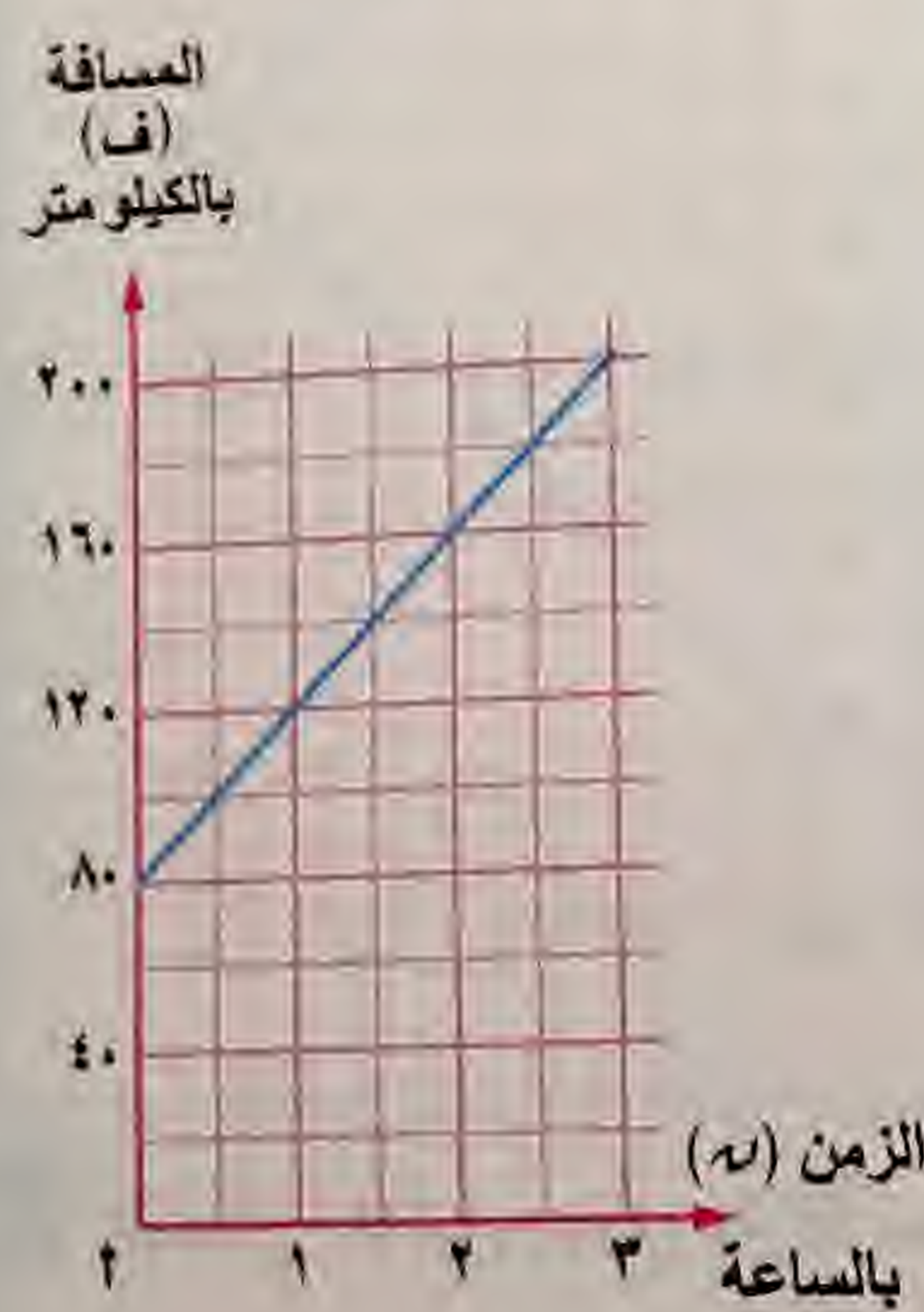
أى أن: المسافة التى تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان = ٥٠٠ كيلو متر.

حاول بنفسك

الشكل البيانى المقابل يمثل حركة سيارة مقيسة من نقطة ثابتة م

١ عين السرعة المنتظمة للسيارة.

٢ احسب المسافة المقطوعة بعد مرور ساعتين من بدء الحركة.



① ٣٠٤ ك / ٣٦٠ ⑧ ٧٠ ك

تمارين 13

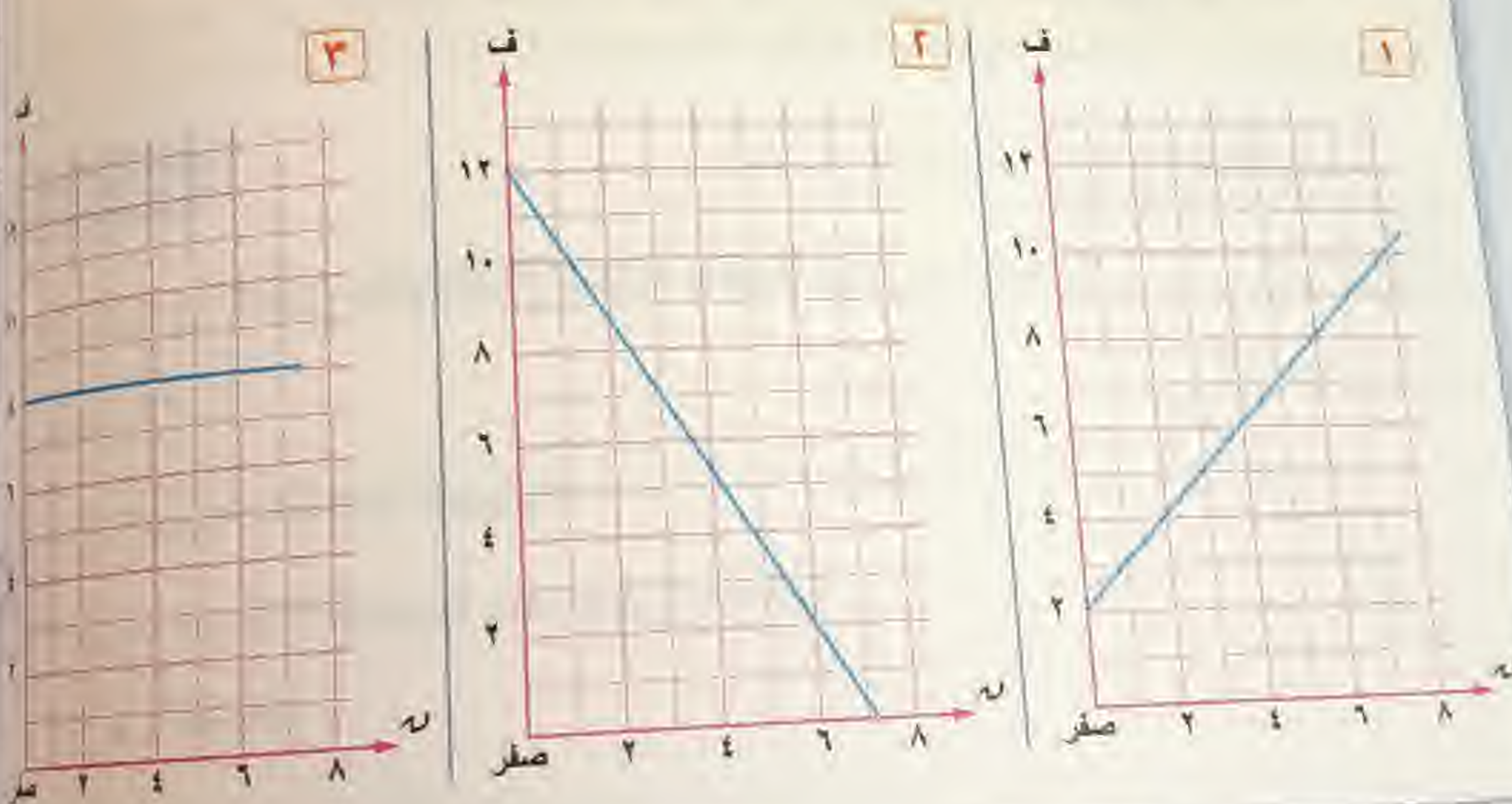
تطبيقات حياتية على ميل الخط المستقيم

أسئلة كتاب الوزارة

١ سيارة تسير بسرعة منتظمة بحيث تقطع ١٨٠ كم كل ٣ ساعات فإذا سارت السيارة ٥ ساعات فما هى المسافة التى تقطعها ؟

٢ تستهلك آلة للرى ٢.٤٧ من اللتر من السولار لتشغيلها ٣ ساعات ، فإذا عملت [illegible] ١٠ ساعات فكم لترًا من السولار سوف تستهلك الآلة ؟

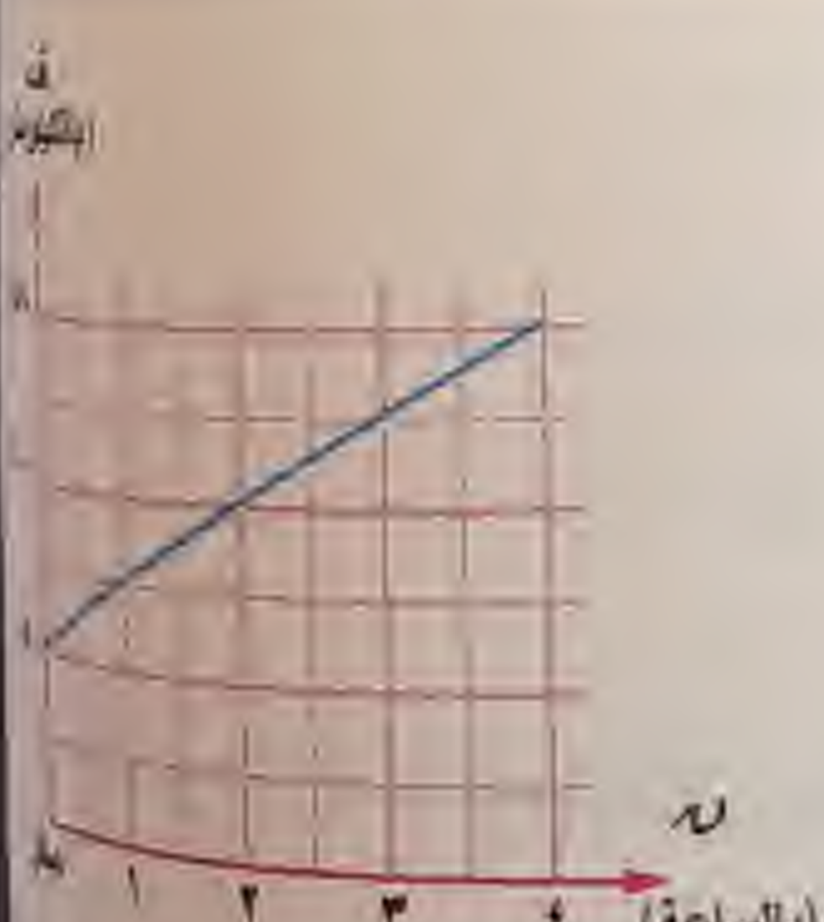
٣ كلٌ من الأشكال التالية يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) والزمن ن (بالثانية) [illegible]
حدد موضع الجسم عند بدء الحركة ، وعند ن = ٦ ثوانٍ ، وأوجد ميل المستقيم فى [illegible] حالة (ماذا يمثل الميل ؟)



٤ الشكل المقابل يمثل حركة سيارة تسير بسرعة منتظمة.

عين سرعة السيارة.

«٣٥ كم/ ساعة»



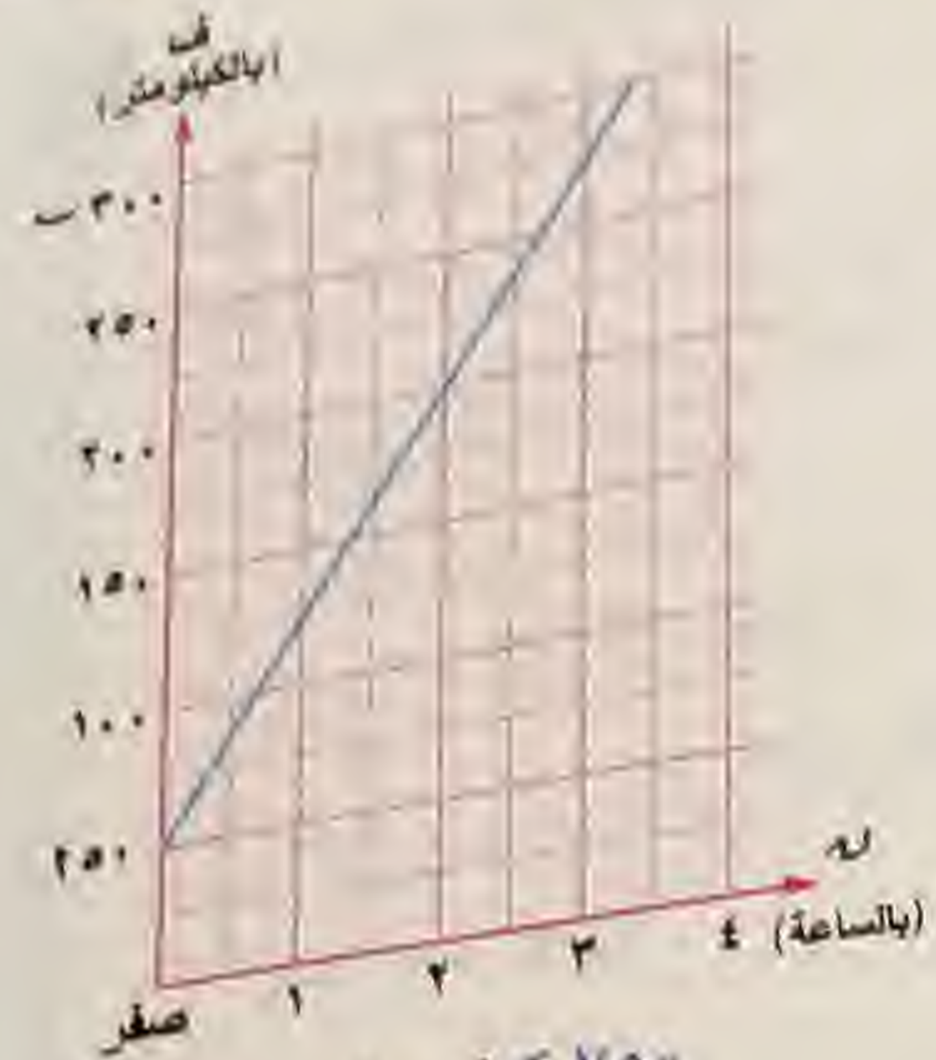
٥ تحرك باسم بسيارته بين المدينتين أ ، ب

والشكل البيانى المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) بالكيلو متر والزمن (ن) بالساعة.

أجب عما يأتى :

١ ما مقدار السرعة المنتظمة لسيارة باسم ؟

٢ أوجد المسافة التى تبعدها السيارة عن نقطة (و) بعد مرور ٣ ساعات من بداية الحركة.



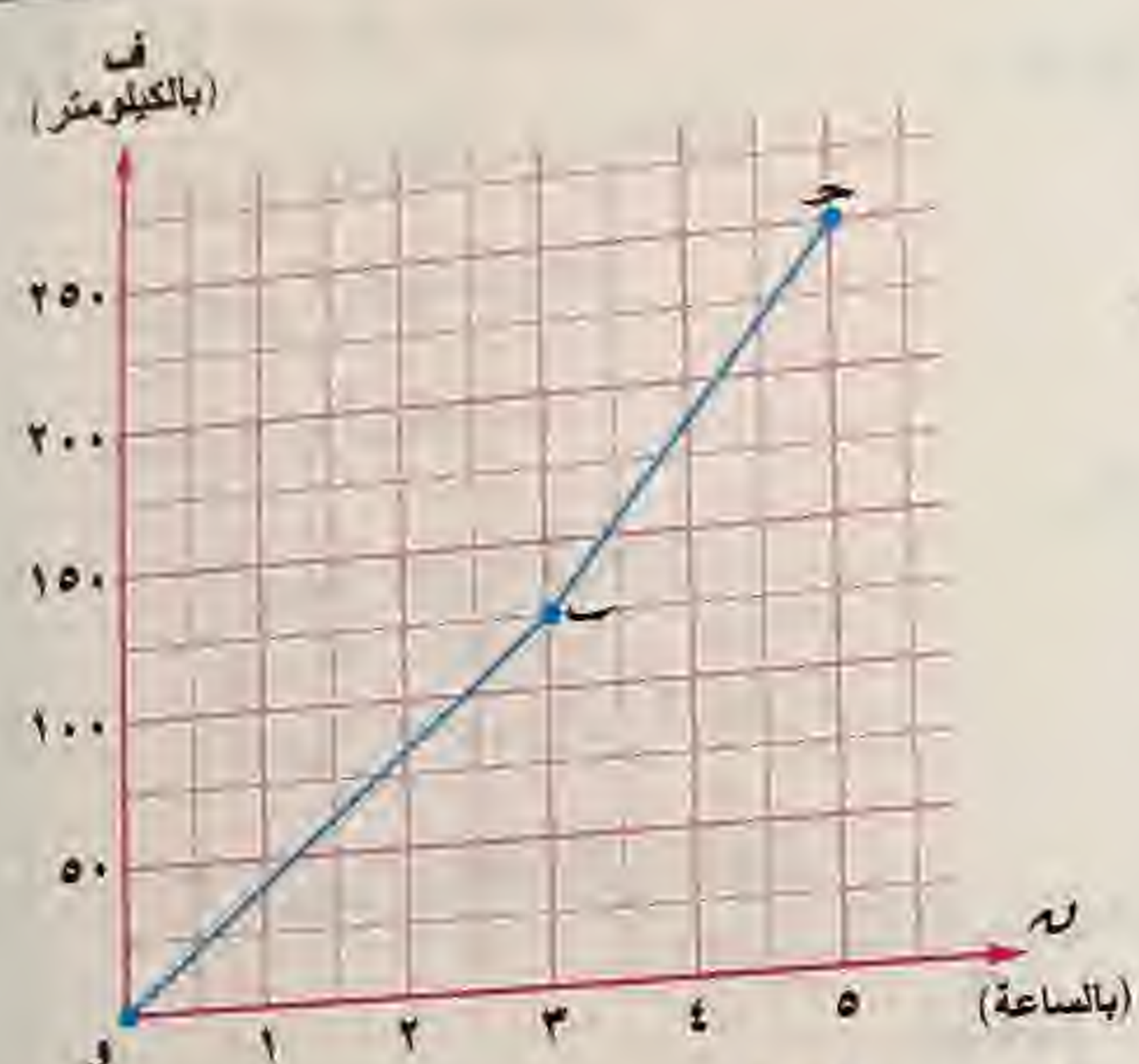
«٧٥ كم/ ساعة ، ٢٧٥ كم»

٦ الشكل المقابل يمثل حركة سيارة.

أجب عما يأتى :

١ أوجد سرعة السيارة خلال الساعات الثلاث الأولى من حركتها ثم خلال الساعتين التاليتين.

٢ أوجد السرعة المتوسطة للسيارة أثناء الرحلة كلها.



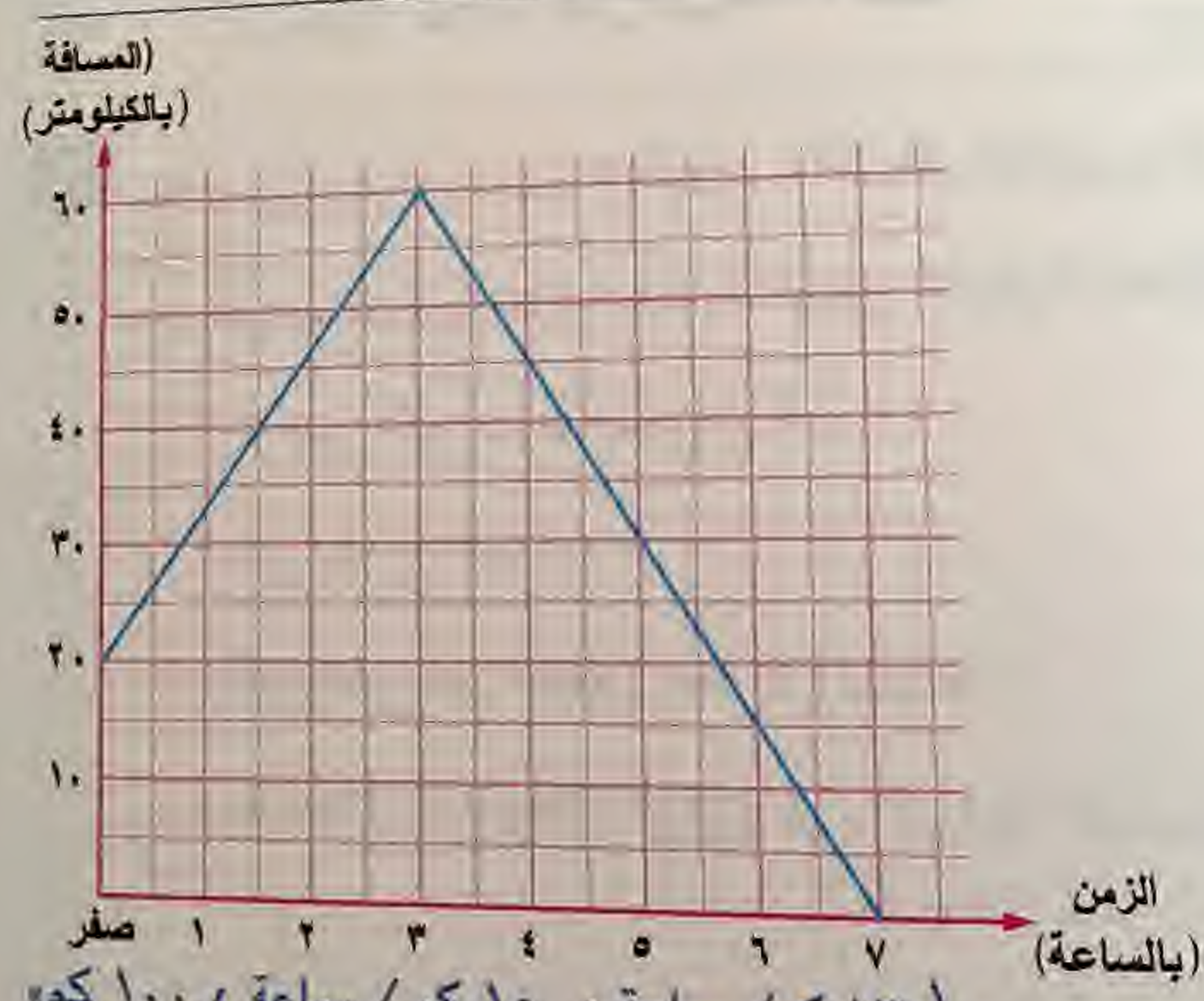
«٤١ $\frac{٢}{٣}$ كم/ ساعة ، ٦٢ $\frac{١}{٢}$ كم / ساعة ، ٥٠ كم / ساعة»

٧ الشكل المقابل يمثل حركة دراجة مقيسة من نقطة ثابتة.

أوجد السرعة المنتظمة للدراجة :

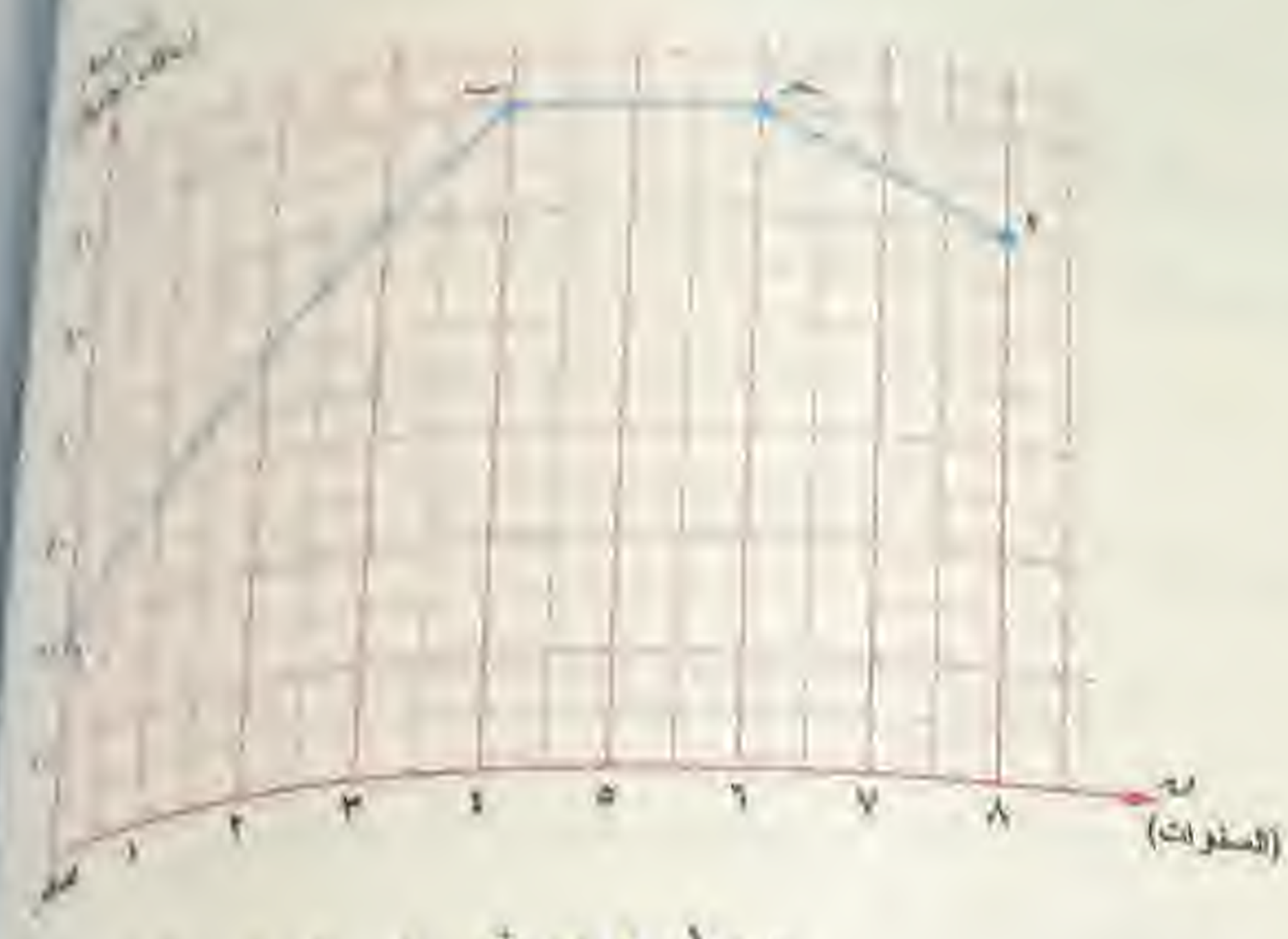
١ خلال الساعات الثلاث الأولى.

٢ خلال الساعات الأربع التالية ، ثم أوجد المسافة الكلية التى تحركتها الدراجة.



«١٣ $\frac{١}{٣}$ كم/ ساعة ، ١٥ كم / ساعة ، ١٠٠ كم»

٨ الشكل المقابل يوضح تغير رأس مال شركة خلال ٨ سنوات.

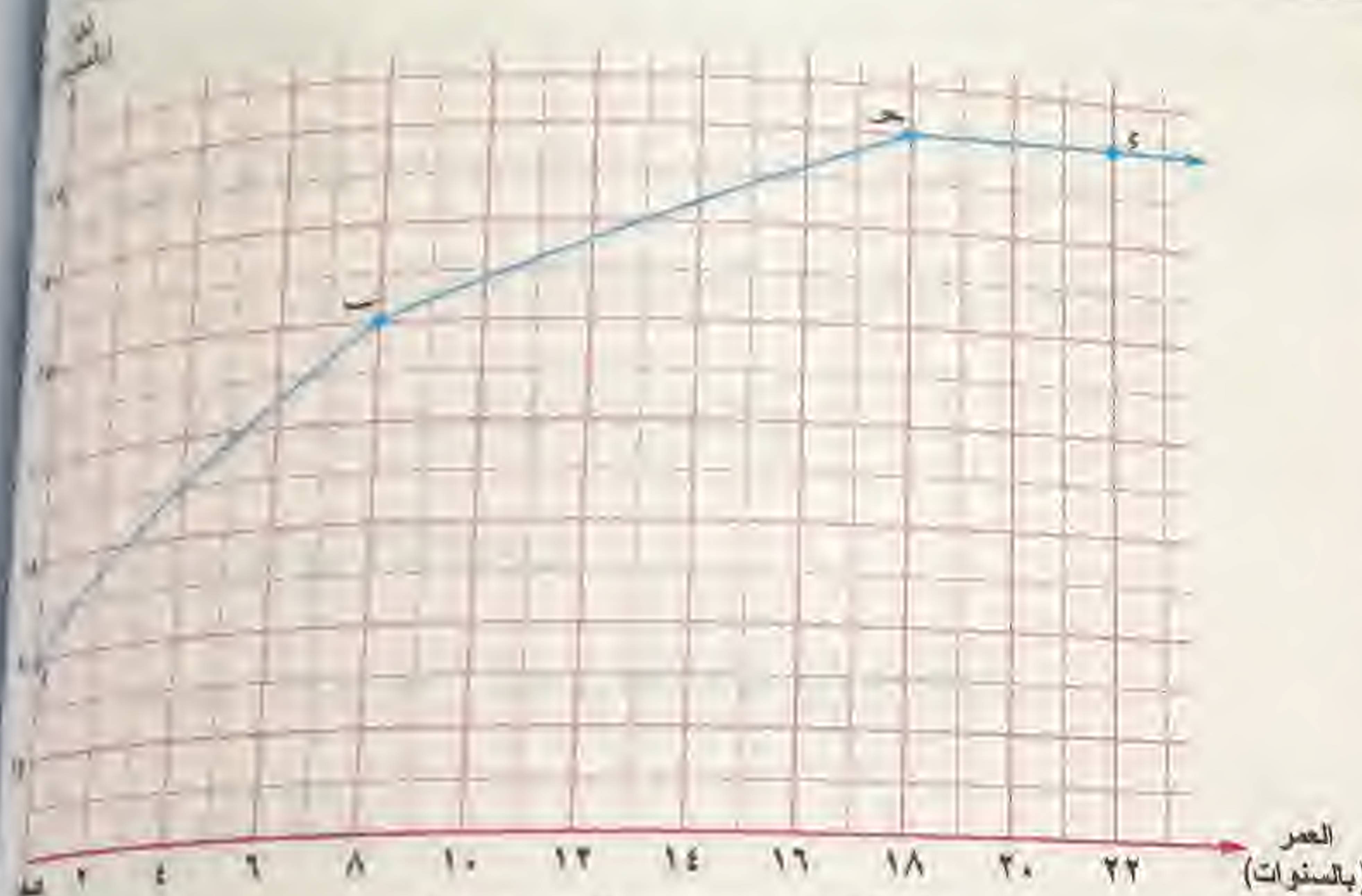


١ أوجد ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، وما دلالة كل منها ؟

٢ احسب رأس مال الشركة عند بدء عملها.

« ١٠ ، صفر ، –٥ ، ٢٠ ألف جنيه »

٩ الشكل المقابل يوضح العلاقة بين طول شخص بالسنتيمتر وعمره بالسنوات.

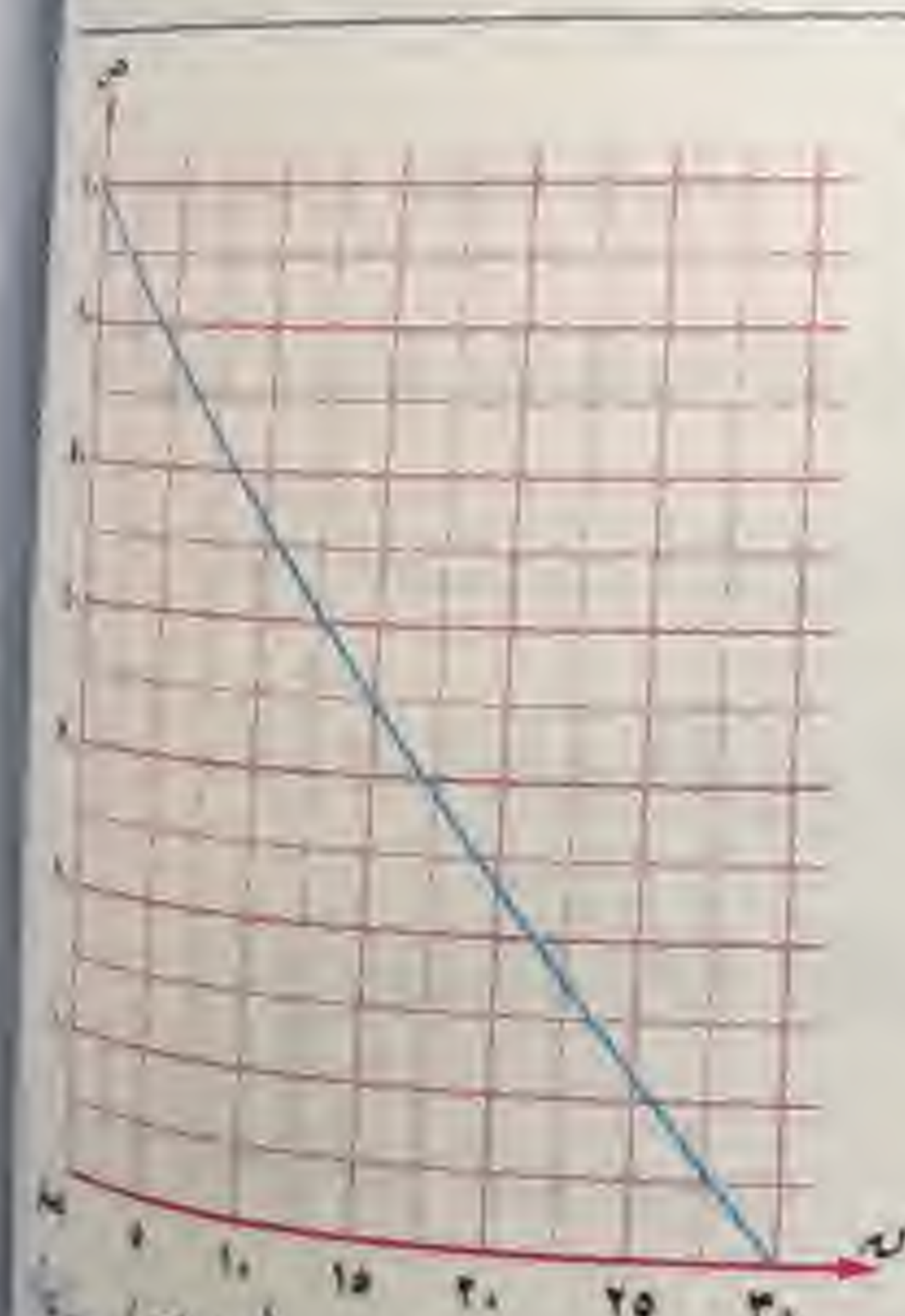


١ أوجد ميل كل من : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، وما دلالة كل منها ؟

٢ احسب الفرق بين طول هذا الشخص عندما كان عمره ٨ سنوات ، وطوله عندما كان عمره ٣٠ سنة.

« $9\frac{3}{8}$ ، ٥ ، صفر ، ٥٠ سم »

١٠ ملأ مجدى خزان سيارته بالوقود ، الشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (ن) بالساعة وكمية الوقود المتبقية (ص) باللتر.



١ ما هى أكبر سعة للخزان ؟

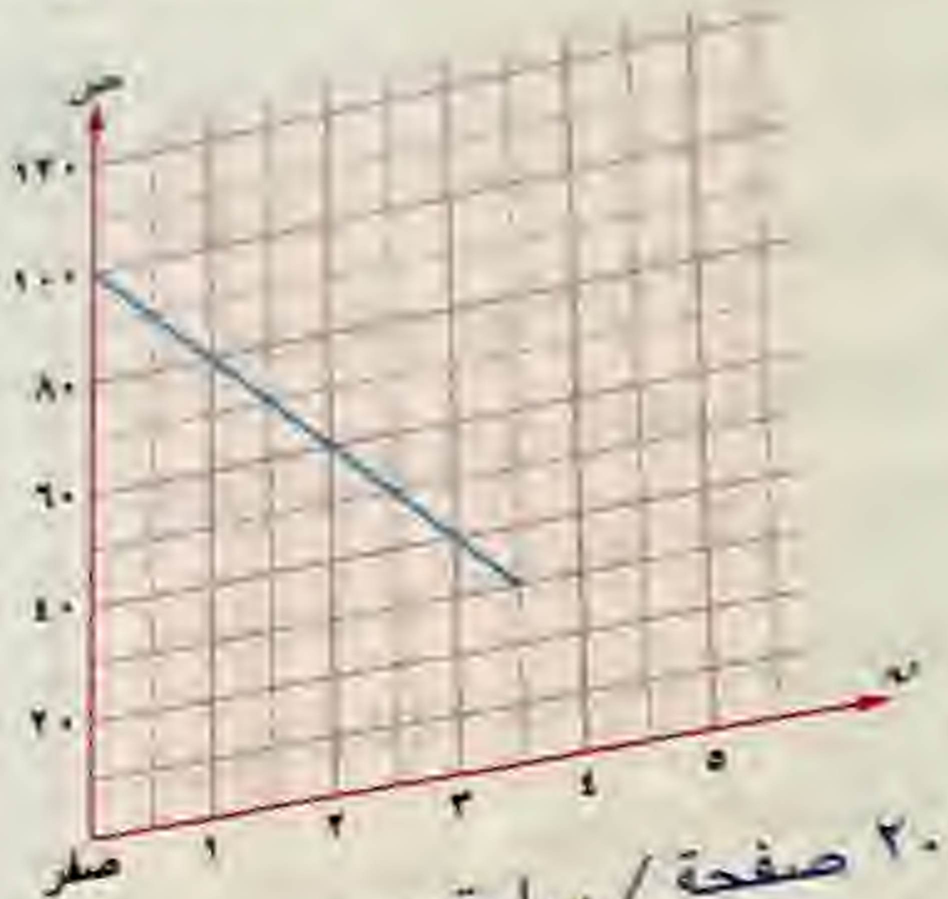
٢ متى يفرغ الخزان ؟

٣ كم يتبقى من الوقود بعد ١٥ ساعة ؟

٤ ما معدل استهلاك الوقود فى الساعة الواحدة ؟

« ٧٠ لترًا ، ٣٠ ساعة ، ٣٥ لترًا ، $2\frac{1}{3}$ لتر/ساعة »

١١ قرأ شخص ما أحد الكتب والشكل البيانى المقابل يوضح العلاقة بين الزمن (ن) بالساعة وعدد الصفحات المتبقية (ص)



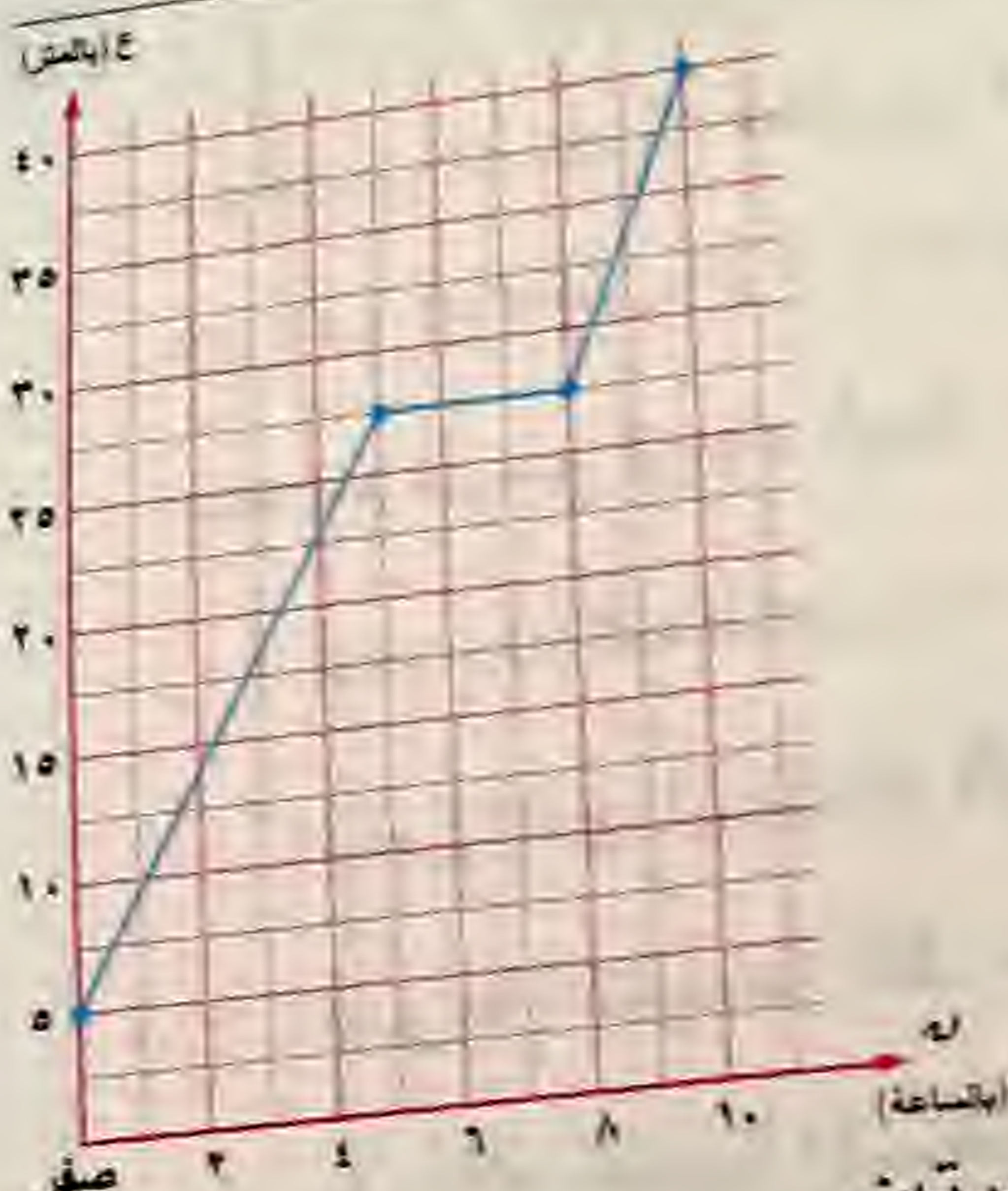
١ كم عدد صفحات الكتاب المتبقية عند بداية القراءة ؟

٢ أوجد معدل الصفحات المقروءة فى الساعة.

٣ متى ينتهى هذا الشخص من قراءة الكتاب ؟

«١٠٠ صفحة ، ٢٠ صفحة / ساعة ، بعد ٥ ساعات»

١٢ أراد صاحب مزرعة أن يستكمل حفر بئر فاستأجر حفارًا ليقوم بالحفر والشكل المقابل يوضح عمق البئر (ع) بالمتر بعد زمن (ن) بالساعة. **أوجد :**



١ عمق البئر قبل بدء عمل الحفار.

٢ عمق البئر بعد انتهاء عمل الحفار.

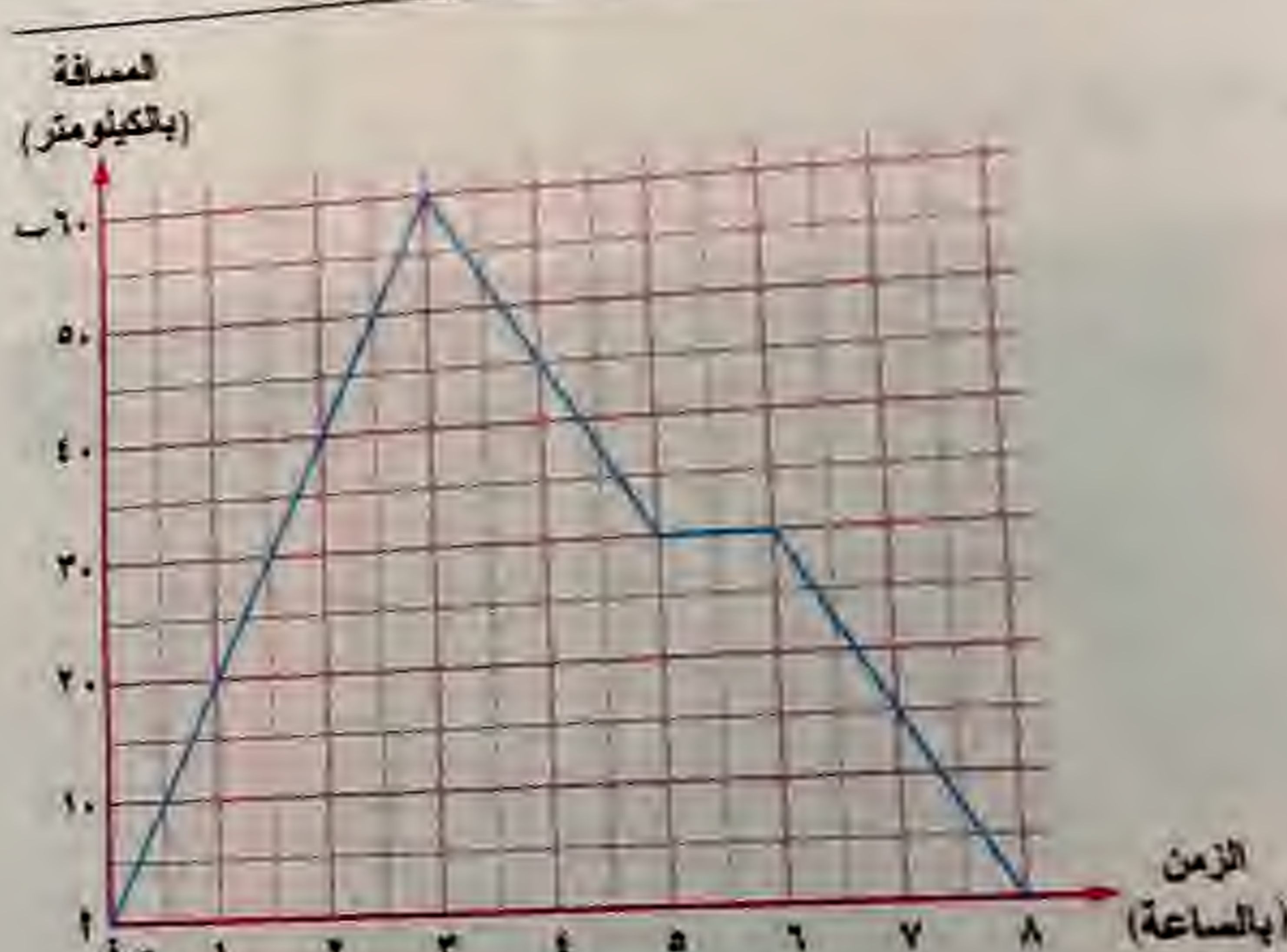
٣ الزمن الكلى الذى استغرقه الحفار فى الحفر.

٤ متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الساعات الخمس الأولى.

٥ متوسط العمق الذى يحفره الحفار فى الساعتين الأخيرتين.

«٥ م ، ٤٠ م ، ١٠ ساعات ، ٤,٥ م/ ساعة ، ٦,٢٥ م/ ساعة»

١٣ الشكل البيانى المقابل يوضح العلاقة بين المسافة بالكيلو متر والزمن بالساعة لدراجة تحركت بين مدينتين ا ، ب ذهاباً وعودة.



أجب عما يأتى :

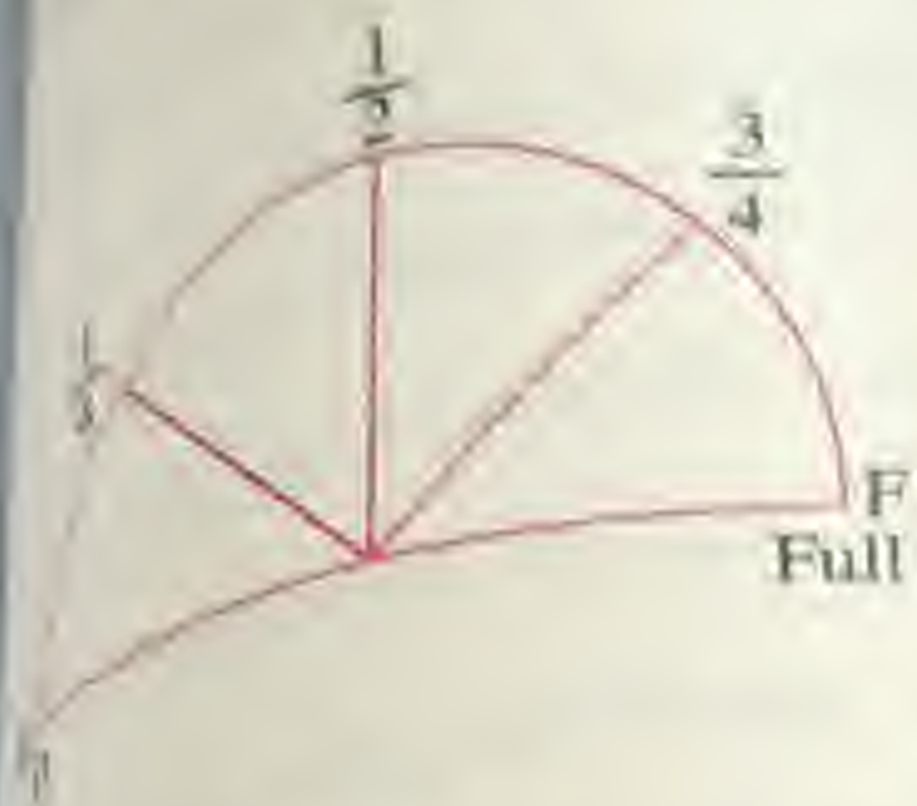
١ ما مقدار السرعة المنتظمة أثناء رحلة الذهاب ؟

٢ ما مقدار السرعة المتوسطة أثناء رحلة العودة ؟

٣ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل ؟

«٢٠ كم/ ساعة ، ١٢ كم/ ساعة»

١٤ ملأ حازم خزان سيارته بالوقود ، وسعة هذا الخزان ٤٠ لترًا ، وبعد أن تحرك ١٢٠ كم ، وجد أن المؤشر يوضح أن المتبقى $\frac{٣}{٤}$ سعة الخزان. ارسم الشكل البيانى الذى يوضح العلاقة بين كمية الوقود بالخزان والمسافة التى قطعتها السيارة (علمًا بأن هذه العلاقة خطية) ، واحسب المسافة التى تقطعها السيارة حتى يفرغ الخزان.



١٥ الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة ف ، والزمن ن لحركة قطارين أ ، ب بين محطتين ، حيث ف (بالكيلو متر) ، ن (بالساعة)

استخدم الرسم لإيجاد قيمة :

١ البعد بين المحطتين.

٢ الزمن الذى استغرقه كل من القطارين.

٣ السرعة المتوسطة لكل منهما.

٤ ما دلالة القطعة المستقيمة فى حركة القطار أ ؟



«١٠٠ كم ، ٢ ساعة ، ٢,٥ ساعة ، ٥٠ كم/ ساعة ، ٤٠ كم/ ساعة»

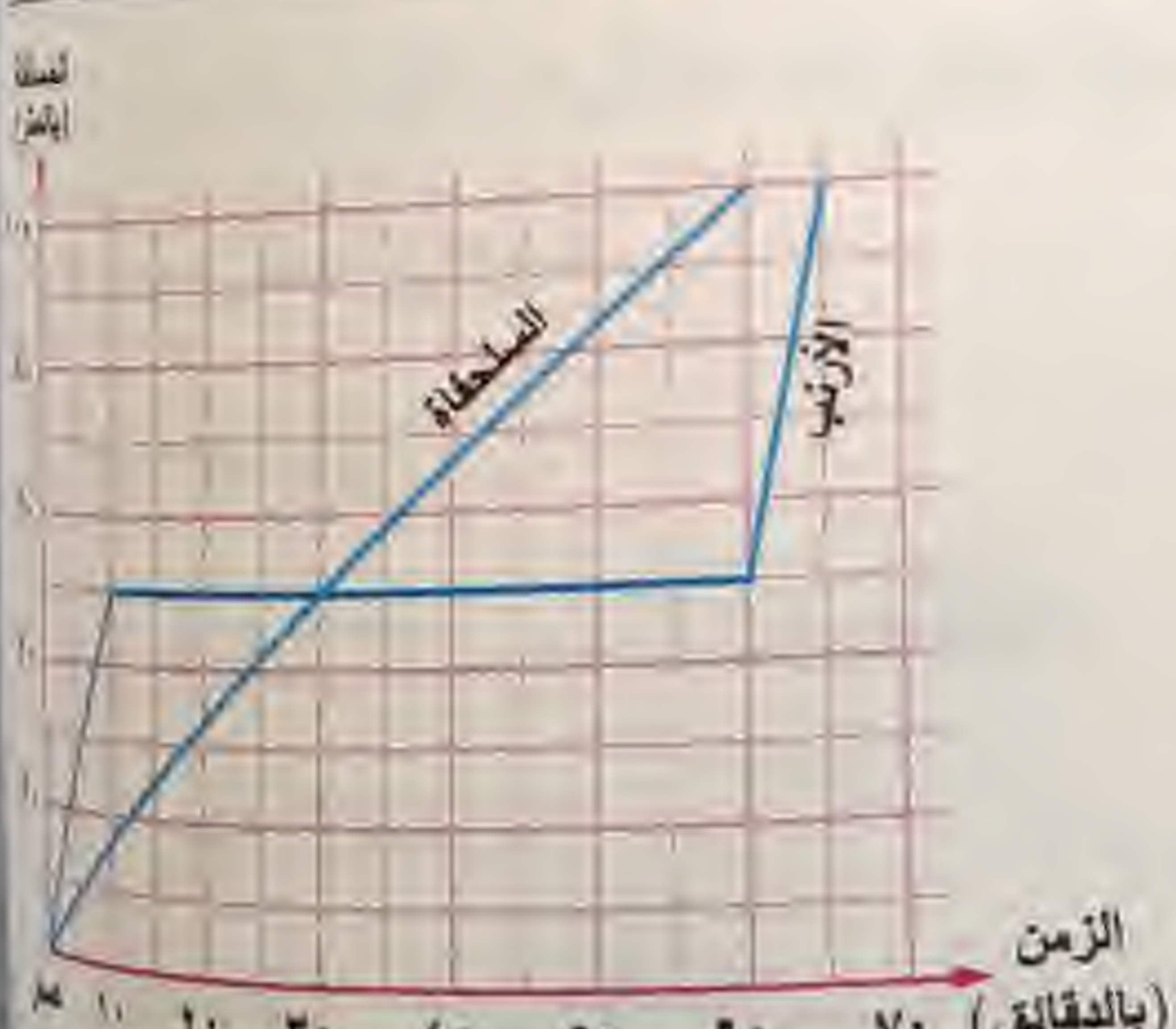
١٦ الشكل المقابل يوضح سباق ١٠٠ متر بين أرنب وسلحفاة. أجب عما يأتى :

١ من الذى فاز بالسباق ؟

٢ ما سرعة السلحفاة ؟

٣ ما السرعة المتوسطة للأرنب ؟

٤ ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية بالرسم ؟



«السلحفاة ، $\frac{٢}{٣}$ ١ م/دقيقة ، $\frac{٧}{١٢}$ ١ م/ دقيقة»

للمتفوقين

١٧ أثناء حركة دراجة بسرعة منتظمة فى خط مستقيم سُجلت المسافات التى تبعدها عن نقطة ثابتة بالكيلو متر بعد مرور فترات زمنية مقيسة بالساعة من بدء حركتها فى الجدول الآتى :

المسافة التى تبعدها الدراجة عن النقطة الثابتة بالكيلو متر	١٢٥	١٥٠	١٧٥	٢٠٠
الزمن المنقضى حتى هذه المسافة بالساعة	٢	٤	٦	٨

مثل بيانياً العلاقة بين المسافة التى تبعدها الدراجة عن النقطة الثابتة والزمن المنقضى

ومن الرسم أوجد :

١ سرعة الدراجة بالكيلو متر/ ساعة.

٢ المسافة التى تبعدها الدراجة عن النقطة الثابتة بعد مرور ٣٠٠ دقيقة.

٣ الزمن الذى عنده تكون الدراجة على بعد ١٨٧٫٥ كم من النقطة الثابتة.

٤ بعد نقطة البداية للدراجة عن النقطة الثابتة.

«١٢٫٥ كم/ ساعة ، ١٦٢٫٥ كم ، ٧ ساعات ، ١٠٠ كم»

ملخص الوحدة الثانية

- العلاقة الخطية هى علاقة من الدرجة الأولى بين متغيرين س ، ص وتكون على الصورة
أ س + ب ص = حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، أ ، ب كلاهما معًا ≠ ٠
ويوجد عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة يحقق هذه العلاقة ، ويمثلها بيانيًا خط مستقيم.
- عند تمثيل العلاقة الخطية بيانيًا نوجد على الأقل زوجين مرتبين يحققان العلاقة ، ثم يمكن إيجاد زوج مرتب ثالث لنتأكد من أن النقاط الثلاثة التى تمثل الأزواج المرتبة الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد فيكون هذا الخط هو التمثيل البيانى للعلاقة.
- العلاقة : ص = ٠ يمثلها بيانيًا محور السينات.
- العلاقة : س = ٠ يمثلها بيانيًا محور الصادات.
- العلاقة الخطية : أ س + ب ص = ٠ يمثلها بيانيًا مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)
- ميل الخط المستقيم = $\frac{\text{التغير فى الإحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الإحداثى السينى}} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

أى أن : م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث : $س_1 \neq س_2$

- ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر
- ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف.



امتحانات على الوحدة الثانية

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى من الأزواج المرتبة الآتية يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥ ؟

(أ) (-٣ ، -١) (ب) (٣ ، ١) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٢ ، ٢)

٢ إذا كان الزوج المرتب (٢ ك ، ك) يحقق العلاقة : ص + ٢ س = ٥

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

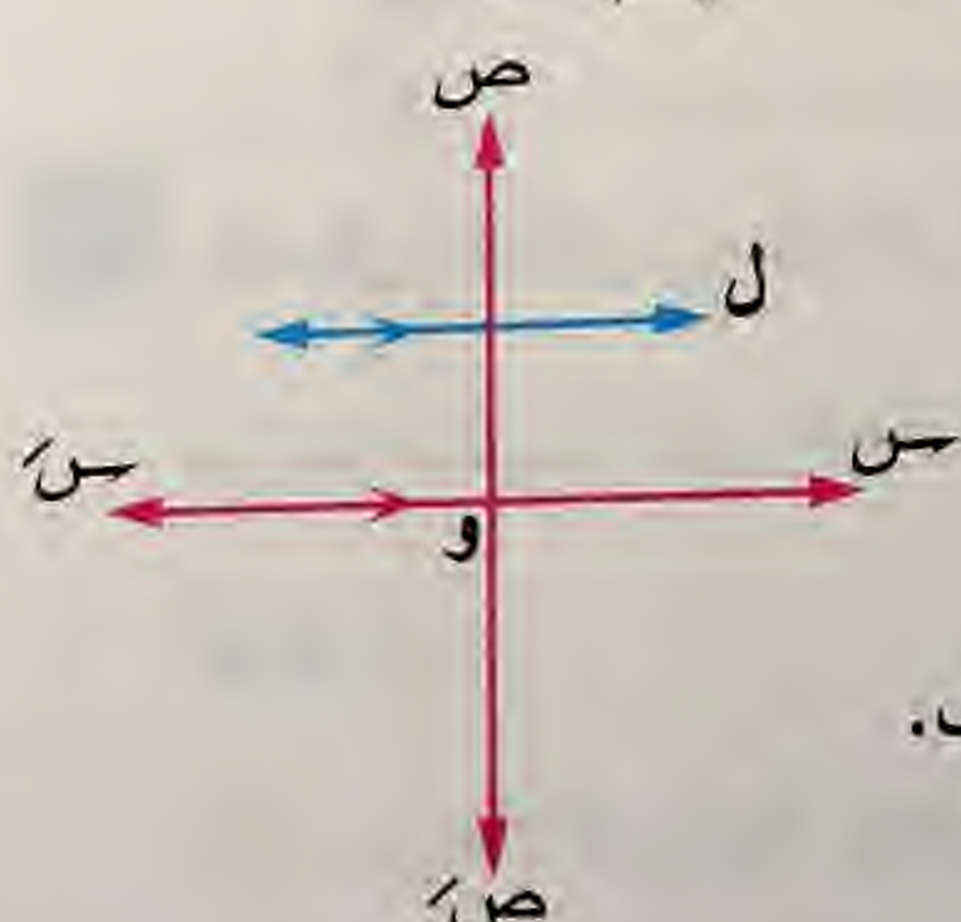
٣ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (-٥ ، ٣) يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) غير معرف.

٤ العلاقة : س − ٣ = ٠ يمثلها خط مستقيم ميله ....

(أ) صفر (ب) غير معرف. (جـ) ٥ (د) -٥

٥ فى الشكل المقابل :



ميل المستقيم ل ....

(أ) موجب. (ب) سالب.

(جـ) صفر (د) غير معرف.

٦ (٣ ، ١) لا يحقق العلاقة ....

(أ) ص + س = ٤ (ب) ٢ س − ص = ٥

(جـ) ٣ ص + س = ٤ (د) ٤ ص + ٢ س = ١٠

٢ أكمل ما يأتى :

١ العلاقة : ٣ س + ٤ ص = ١٢ يمثلها مستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ....

١ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ص) ، (٥ ، -٢) يساوى -٣

فإن : ص = ...

٣ إذا كان : (-١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

٤ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

٥ المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ يمر بنقطة الأصل فإن : حـ = ...

٣ (أ) مثل بيانيًا العلاقة : ٢ س + ص = ٤

(ب) أثبت أن النقط : أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، حـ (-٥ ، -٣)

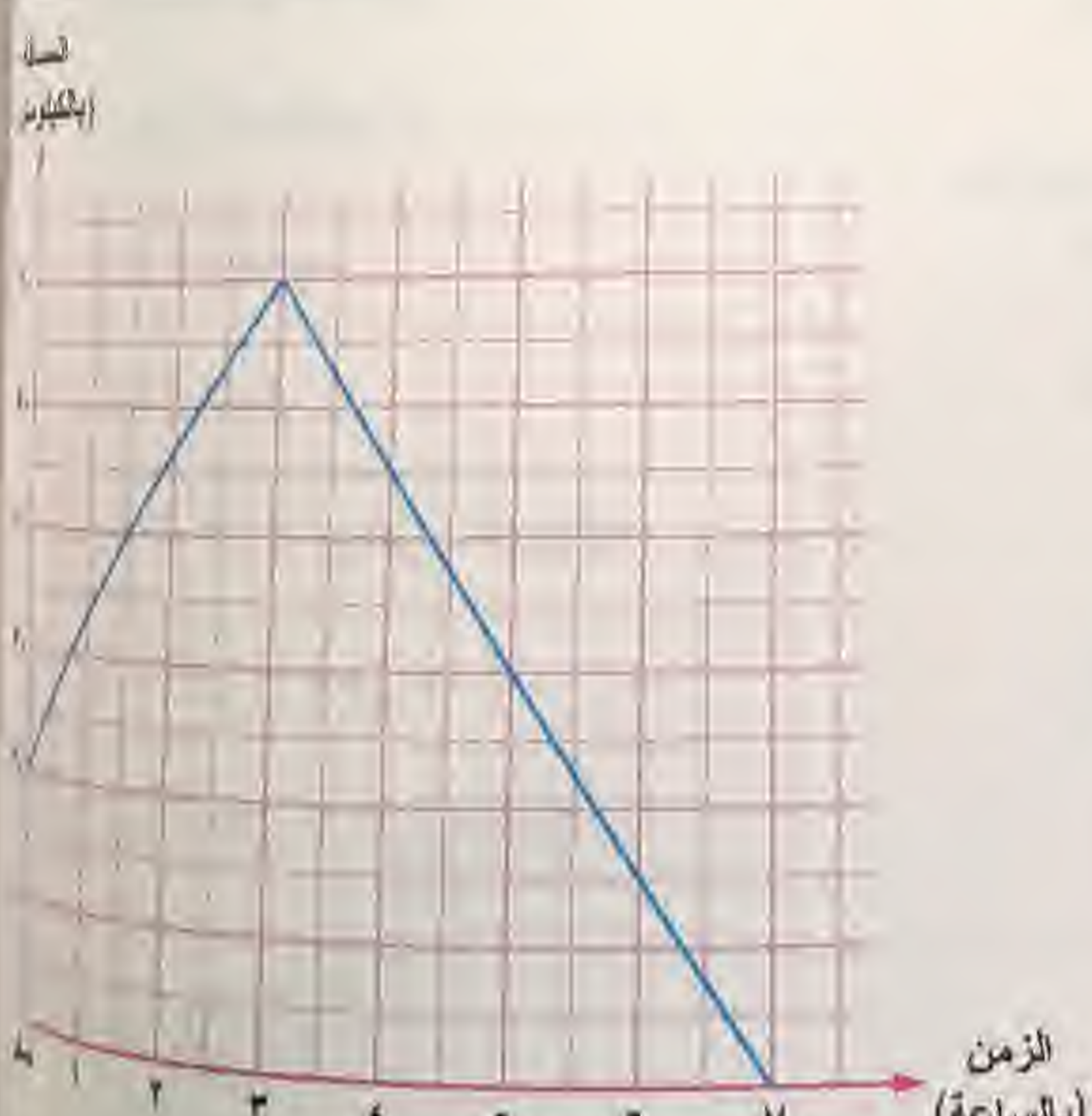
تقع على استقامة واحدة.

٤ (أ) مثل بيانيًا المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ ص - ٣ س = -٦

وإذا كان هذا المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ ويقطع محور الصادات فى النقطة ب ، أوجد مساحة المثلث و أ ب حيث النقطة و هى نقطة الأصل.

(ب) أوجد قيمة ص بحيث يكون المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، -١) ، (-٢ ، ٢ ص) عموديًا على محور الصادات.

٥ الشكل المقابل يمثل حركة دراجة مقيسة من نقطة ثابتة.



أوجد :

١ سرعة الدراجة خلال الساعات الثلاث الأولى.

٢ سرعة الدراجة خلال الساعات الأربع التالية.

٣ المسافة الكلية التى تحركتها الدراجة.

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزوج المرتب الذى لا يحقق العلاقة : ص = س + ١ هو ....

(أ) (٠ ، ١) (ب) (٢ ، ٣) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٢ ، ٥)

٢ إذا كان : (٥ ، ٢ م) يحقق العلاقة : ص = ٣ س − ١ فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

٣ إذا كان ميل المستقيم الذى يمثل العلاقة : س + م ص = ٥ غير معرّف

فإن : م = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٥ (د) صفر

٤ العلاقة : ٢ س + ٣ ص = ١٢ يمثلها مستقيم يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٦ ، ٠) (ب) (٠ ، ٦) (جـ) (٠ ، ٤) (د) (٤ ، ٠)

٥ فى الشكل المقابل :



ميل المستقيم ل ....

(أ) موجب. (ب) سالب.

(جـ) صفر. (د) غير معرف.

٦ ميل الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ص ص}}$ ....

(أ) صفر (ب) غير معرف (جـ) ١ (د) −١

٢ أكمل ما يأتى :

١ ميل المستقيم الذى يوازى محور السينات يساوى ....

٢ إذا كان : (٢ ، −١) يحقق العلاقة : ٢ س + ٣ ص + حـ = ٠ فإن : حـ = ...

٣ المستقيم الممثل للعلاقة : ص = ٢ س + ٥ يقطع محور السينات فى النقطة ....

٤ العلاقة : س − ٥ = ٠ يمثلها مستقيم ميله ....

٥ إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بحـ}$ حيث ب نقطة مشتركة

فإن : أ ، ب ، حـ تقع على ....

٣ (أ) مثل بيانيًا العلاقة : ص − ٢ س + ١ = صفر

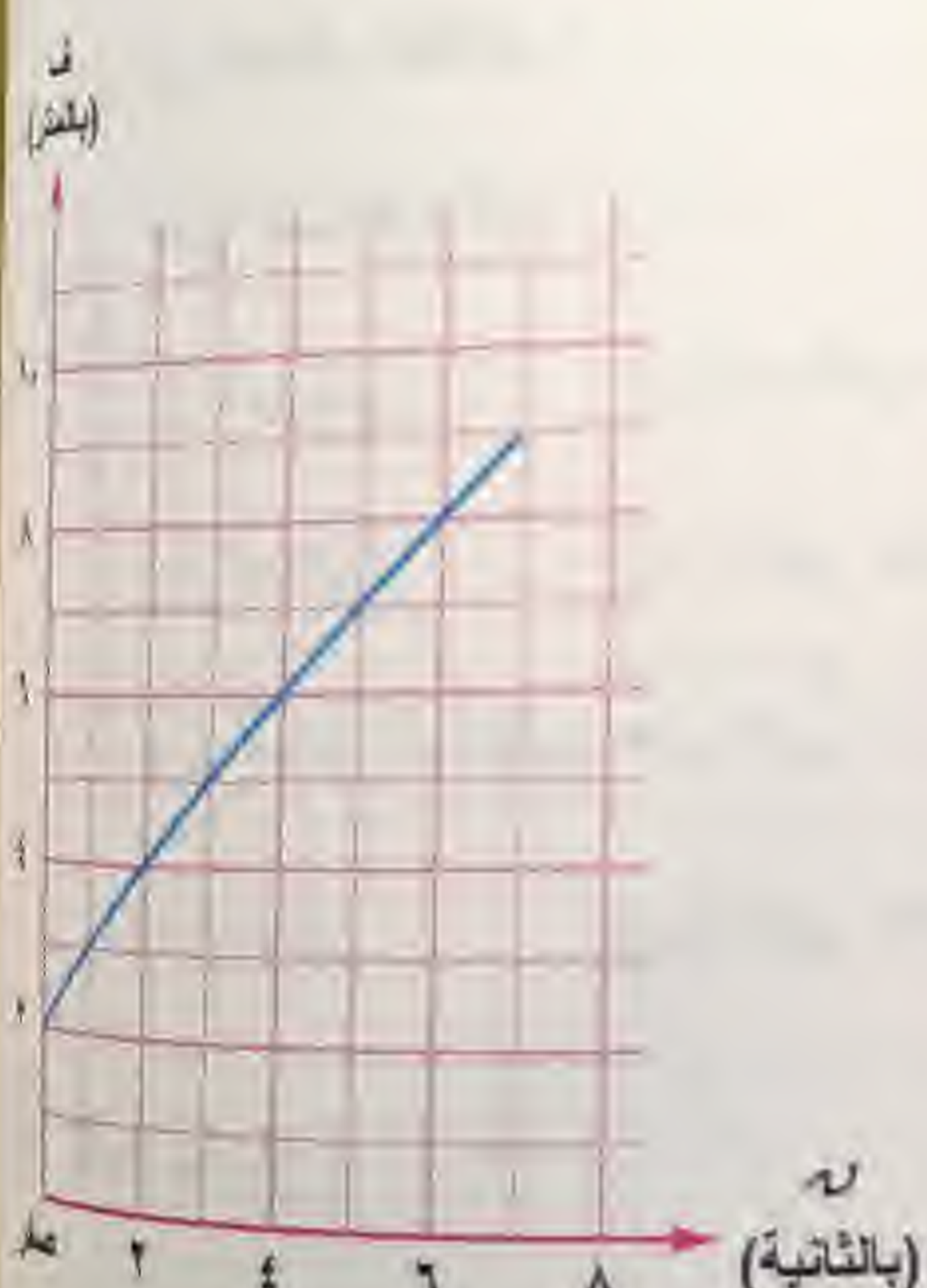
(ب) إذا كان المستقيم الممثل للعلاقة : س − ٢ ص = أ يقطع محور الصادات فى النقطة (ب ، ٣) فأوجد قيمة كل من : أ ، ب

٤ (أ) إذا كان ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٣ ، أ) ، (٥ ، ٤) يساوى ٣

أوجد قيمة : أ

(ب) أثبت أن النقط : أ (٢ ، −٣) ، ب (٤ ، −٥) ، حـ (٠ ، −١) تقع على استقامة واحدة.

٥ الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة ف (بالمتر) التى يُبعدها جسم عن مرصد والزمن ن المنقضى بعد تحركه (بالثانية)



أولًا : حدد بُعد الجسم عن المرصد :

١ عند بدء الحركة.　　٢ بعد ٦ ثوانٍ.

ثانيًا : أوجد ميل المستقيم الذى يمثل العلاقة.

مشروع بحثى



على الوحدة الثانية

أهداف المشروع

- التعرف على العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى.
- تمثيل العلاقة بين متغيرين من الدرجة الأولى بيانيًا.
- استخدام الجبر فى حل المشكلات الحياتية.
- الربط بين الرياضيات والدراسات الاجتماعية.

المطلوب

« ممارسة الرياضة هى بداية الطريق لحياة صحية أفضل، وقد حقق أبطالنا العرب الكثير من الإنجازات الهامة فى الكثير من البطولات العالمية »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- اذكر بعض إنجازات أبطالنا فى الوطن العربى فى مجال الرياضة.
- فى مباريات كرة القدم يحصل الفريق على ثلاث نقاط فى حالة الفوز، ونقطة واحدة فى حالة التعادل، فإذا حصل أحد الفرق على ٣٠ نقطة.

(١) اكتب العلاقة الرياضية بين (س) و (ص).

حيث : س عدد المباريات التى فاز بها هذا الفريق ، ص عدد المباريات التى تعادل فيها.

ومنها اكتب خمس طرق مختلفة للحصول على الثلاثين نقطة.

(٢) مثل هذه العلاقة بيانيًا.

الوحدة

3 الإحصـــــاء



دروس الوحدة :

- الدرس 1 : جمع البيانات وتنظيمها.
- الدرس 2 : الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانياً.
- الدرس 3 : الوسط الحسابى.
- الدرس 4 : الوسيط.
- الدرس 5 : المنوال.

مشروع بحثى على الوحدة الثالثة



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل الدرس

أهداف الوحدة :

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- ينظم البيانات فى جداول تكرارية ذات مجموعات.
- يكون كلًا من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- يمثل كلًا من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.
- يوجد الوسط الحسـابى لمجموعة من البيانات منظمة فى جدول تكرارى ذى مجموعات.
- يوجد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات.
- يحسب المنوال من جدول تكرارى ذى مجموعات.



الدرس
1

جمع البيانات وتنظيمها

تعرفنا فى العام الماضى على كيفية تنظيم البيانات وعرضها فى جداول تكرارية بسيطة ،
عندما يكون حجم البيانات كبيرًا فإنه من المفيد عند تنظيمها تقسيم هذه البيانات إلى
مناسب من المجموعات ، وتحديد عدد المفردات التى تنتمى إلى كل مجموعة.
الجدول الذى يتكون من المجموعات والتكرار المناظر لكل مجموعة يُسمى الجدول التكرارى
المجموعات.
والمثال التالى يوضح كيفية تنظيم البيانات فى مثل هذه الجداول.

مثال ١

**فيما يلى درجات ٥٤ طالبًا فى أحد فصول الصف الثانى الإعدادى بإحدى المدارس التى حصـ
عليها فى اختبار لمادة الرياضيات حيث النهاية العظمى ٦٠ درجة.**

٤٢	٥٤	٣٦	٤٦	٣٤	٤٥	٥١	٤٠	٤٨
٤٨	٤٠	٤٧	٢٥	٤٨	٤٥	٣٦	٥٦	٤٤
٣٨	٤٧	٣٠	٣٧,٥	٤٠	٢٠	٤٢	٢٨	٥٠
٤٧	٥٥	٢٧	٤٥	٣٠	٤٢	٥١	٤٣	٤٦
٢٩	٤٣	٥٩	٣٥	٤٤,٥	٣٢	٢٤	٣٩	٥٤
٤١	٣٦	٤٥	٣٩	٤٢	٥٨	٣٥	٥٠	٤٥

المطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات.

الحل

١ نحدد المدى وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة.

∵ أصغر درجة هى ٢٠ وأكبر درجة هى ٥٩

∴ المدى = ٥٩ − ٢٠ = ٣٩

٢ نقسم هذه البيانات إلى عدد مناسب من مجموعات الدرجات وليكن ١٠ مجموعات منفصلة طول كل منها ٤ فنحصل على المجموعات الآتية :

- المجموعة الأولى : الطلبة الحاصلون على ٢٠ درجة حتى أقل من ٢٤ درجة وتكتب (٢٠−)
- المجموعة الثانية : الطلبة الحاصلون على ٢٤ درجة حتى أقل من ٢٨ درجة وتكتب (٢٤−)
- المجموعة الثالثة : الطلبة الحاصلون على ٢٨ درجة حتى أقل من ٣٢ درجة وتكتب (٢٨−)

وهكذا حتى نصل إلى :

- المجموعة العاشرة : الطلبة الحاصلون على ٥٦ درجة حتى أقل من ٦٠ درجة وتكتب (٥٦−)

٣ نكون جدول التفريغ أو العلامات الآتى :

المجموعات	العلامات	التكرار
−٢٠	/	١
−٢٤	///	٣
−٢٨	////	٤
−٣٢	////	٤
−٣٦	~~////~~ //	٧
−٤٠	~~////~~ ~~////~~	١٠
−٤٤	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
−٤٨	~~////~~ //	٧
−٥٢	///	٣
−٥٦	///	٣
المجموع		٥٤

جدول التفريغ أو العلامات

• نحذف العمود الأوسط (العلامات) من الجدول فنحصل على الصورة النهائية للجدول التكراري ذي المجموعات ويمكن كتابته رأسيًا أو أفقيًا ، والصورة الأفقية للجدول هي كالآتي :

المجموعات	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	٤٠-	٤٤-	٤٨-	٥٢-	٥٦-	المجموع
التكرار	١	٣	٤	٤	٧	١٠	١٢	٧	٣	٣	٥٤

ومن الجدول السابق نستنتج أن :

• المجموعة التي بها أكبر تكرار هي ٤٤-

• المجموعة التي بها أقل تكرار هي ٢٠-

حاول بنفسك

فيما يلي أوزان ٥٠ شخصًا :

٥٢	٣٥	٤٠	٥٧	٤٣	٤٠	٣٦	٤٩	٤٣	٥٨
٤٧	٤٨	٥١	٣٠	٥٩	٣٦	٤٥	٤١	٤٤	٣٧
٤٢	٥٤	٣٨	٥٥	٤٢	٤٧	٤٦	٣٤	٥٣	٤٤
٤٧	٣٢	٤١	٦٢	٥٠	٣٩	٥٨	٤٦	٤٣	٤٩
٤٠	٤١	٦٤	٤٤	٥٤	٤٥	٣٨	٤٠	٤٨	٤١

كون الجدول التكراري ذي المجموعات.

تمارين 14

على جمع البيانات وتنظيمها



أسئلة كتاب الوزارة

١ فيما يلى الوزن بالكيلو جرام لعدد ٤٠ تلميذًا من تلاميذ أحد فصول الصف الثانى الإعدادى المطلوب وضعها فى صورة جدول التوزيع التكرارى ذى المجموعات.
خذ المجموعات (٢٥– ، ٣٠– ، ٣٥– ، ...)

٣١	٣٠	٤٢	٣٧	٢٥	٣٤	٣٥	٢٨	٣٠	٢٨
٢٩	٣٦	٣٨	٣٢	٤٤	٣٩	٣٤	٣٦	٣٥	٣٠
٣٠	٣٥	٣٠	٣٨	٢٧	٤١	٣٣	٣٩	٣١	٣٦
٣٦	٣٣	٣٧	٣١	٤٣	٣٥	٤٠	٣١	٣٩	٤٥

٢ فيما يلى الأجر الأسبوعى بالجنيهات لأربعين عاملاً فى أحد المصانع :

٤٧	٧١	٣٦	٩٤	٥٤	٦٤	٨٧	٨٩	٦٢	٥٧
٥١	٦١	٤٤	٥٢	٧٠	٦٦	٥٦	٣٢	٦٩	٣٦
٧٩	٤٨	٧٧	٩٠	٦٥	٩٩	٩٦	٦٧	٦٠	٥٥
٩٥	٧٥	٨١	٨٤	٧٨	٣٨	٤٩	٩٤	٤٨	٥٩

والمطلوب عمل جدول تكرارى ذى مجموعات (خذ المجموعات الجزئية : ٣٠– ، ٤٠– ، ٥٠– ، ... ، ٩٠–) وما المجموعة التى بها أكبر تكرار ؟ وما المجموعة التى بها أقل تكرار ؟

٣ فيما يلى درجات ٣٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات :

٢٥	٣٥	٤٠	٢٠	٣٠	٣٧	٤٠	٣٣	٢٢	٣٨
٢٥	٣٦	٢٨	٣٧	٣٩	٢٨	٣٢	٢٦	٢٩	٣٧
٢٣	٣٤	٣٥	٣٦	٢٩	٣٨	٤٠	٣٥	٣٧	٣١

المطلوب :

١ كون جدولاً تكراريًا ذى مجموعات لهذه الدرجات.

٢ أوجد عدد التلاميذ الممتازين إذا كانت أقل درجة ليكون التلميذ ممتازًا هى ٣٦ درجة.

«١٢ تلميذًا»

٤ فيما يلى بيان بدرجات طلاب الصف الثانى الإعدادى فى أحد الفصول ، فى امتحان [illegible] وعددهم ٤٠ طالبًا (والنهاية العظمى ٢٠ درجة).

[illegible]	١٢	١٨	٣	١٤	١٣	٧	١١	٧	
١٠	١٢	١١	١٥	٥	١٢	١٥	٨	١٦	
٦	١٠	٧	١٤	١٥	٨	١٥	٩	٨	
١٤	١٧	١١	٤	١٢	١٠	٢	٧	١٠	
١٣									

والمطلوب عمل جدول تكرارى لدرجات الطلاب فى مادة الجبر ، باستخدام المجموعات ٠– ، ٤– ، ٨– ، ... وهكذا. ثم أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين حصلوا على ١٢ درجة فاكثر.

٥ فيما يلى بيان بأطوال ٥٠ شخصًا بالسنتيمتر :

١٦٦	١٨٢	١٥٠	١٩٩	١٤٤	١٨٦	١٨١	١٦٣	١٨٣	١٥٥
١٧٣	١٥٤	١٦٦	١٦٣	١٣٠	١٥٣	١٥٨	١٨٨	١٢٦	١٩٧
١٨٨	١٥٧	١٧٧	١٧٣	١٥٦	١٦٤	١٩٨	١٤٦	١٦٣	١٣٧
١٦٠	١٧٦	١٤٢	١٤٧	١٤٣	١٨٤	١٧٣	١٧٨	١٨٧	١٣٨
[illegible]	١٢٦	١٢٨	١٩٦	١١٢	١٤٩	١٦٧	١٥٤	١٩٤	١٧٠

١ أوجد أقل طول فى المجموعة وأكبر طول فيها ، والمدى الذى يقع فيه هذان الطولان.

٢ كون جدولاً تكراريًا باستخدام مجموعات طول كل منها ١٠ سنتيمترات.

٦ فى أحد معسكرات التجنيد قيست أطوال ٥٥ جنديًا فكانت أطوالهم بالسنتيمترات كالآتى :

[illegible]	١٧٦	١٨١	١٨٦	١٦٦	١٨٨	١٦٥	١٨٥	٢٠٠	١٩٤	١٦٩
[illegible]	١٩٢	١٨٤	١٧٣	١٧٣	١٨٠	١٩٣	١٧٠	١٨٨	١٧٩	١٧٧
[illegible]	١٨١	١٧٥	١٧٥	١٧٢	١٧٩	١٧١	١٨٩	١٨٦	١٦٨	١٨٢
[illegible]	١٦٦	١٨٤	١٧٨	١٧٧	١٧٢	١٩٠	١٦٥	١٧٥	١٧٧	١٨٥
[illegible]	١٨٧	١٨٩	١٧٦	١٩٥	١٧٩	١٧٥	١٧٤	١٧٢	١٧٧	١٧٨

كون جدولاً تكراريًا باستخدام المجموعات (١٦٥– ، ١٧٠– ، ١٧٥– ، ...)

من الجدول أوجد : ١ عدد الجنود الذين أطوالهم أقل من ١٨٥ سم

٢ عدد الجنود الذين أطوالهم على الأقل ١٨٠ سم



الدرس **2**

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيًا

تمهيد

فى الدرس السابق درست كيفية تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات والحصول منه على بعض المعلومات كالجدول التالى الذى يمثل توزيع أجور ٥٠ عاملاً أسبوعيًا فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

ومن خلال هذا الجدول يمكنك معرفة عدد العمال (التكرار) فى كل مجموعة على حدة.

فمثلاً : - عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٥٨ جنيهًا وأقل من ٦٢ جنيهًا **١٢** عاملاً.

- عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٦ جنيهًا وأقل من ٧٠ جنيهًا **٧** عمال.

ولكنك لا تستطيع معرفة بعض المعلومات الأخرى من هذا الجدول مباشرة مثل :

- عدد العمال الذين يحصلون على أقل من ٦٢ جنيهًا.
- عدد العمال الذين يحصلون على ٥٨ جنيهًا فأكثر.

وحتى تستطيع معرفة مثل هذه المعلومات ، ستحتاج لدراسة نوع آخر من الجداول وهى الجداول التكرارية المتجمعة (الصاعدة والنازلة). وهذا ما سنوضحه فى الأمثلة التالية :

مثال ١

الجدول التكرارى التالى يبين الأجر الأسبوعى بالجنيه لعدد ٥٠ عاملاً فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب تكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله بيانيًا ثم إيجاد :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا.

الحل

• نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد كالتالى :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤

أقل من ٥٤ = صفر

أقل من ٥٨ = ٥

أقل من ٦٢ = ٥ + ١٢ = ١٧

أقل من ٦٦ = ٥ + ١٢ + ٢٢ = ٣٩

أقل من ٧٠ = ٥ + ١٢ + ٢٢ + ٧ = ٤٦

أقل من ٧٤ = ٥ + ١٢ + ٢٢ + ٧ + ٤ = ٥٠

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٥٤	صفر
أقل من ٥٨	٥
أقل من ٦٢	١٧
أقل من ٦٦	٣٩
أقل من ٧٠	٤٦
أقل من ٧٤	٥٠

«الجدول التكرارى المتجمع الصاعد»

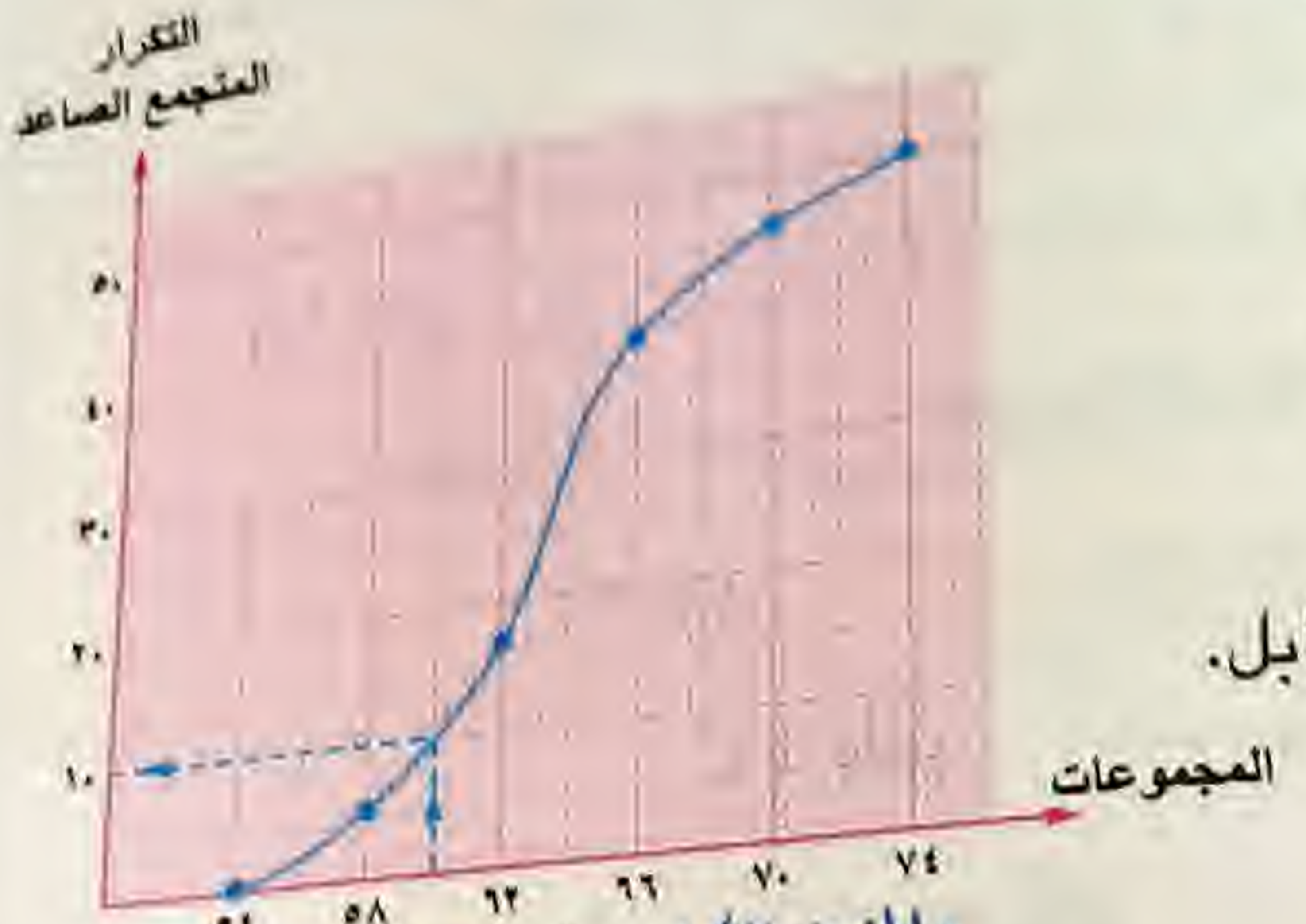
لاحظ أن : التكرار المتجمع الصاعد يبدأ بالصفر وينتهى بالتكرار الكلى.

ولتمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد بيانيًا نتبع الآتى :

١ نخصص المحور الأفقى للمجموعات والمحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد.

٢ نختار مقياسًا مناسبًا للرسم على المحور الرأسى بحيث يتسع المحور للتكرار الكلى المتجمع الصاعد.

٣ نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة ونرسم الخط البيانى لها بالتتابع كما هو موضح بالشكل المقابل.



«المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد»

ومن الرسم نجد أن :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا = ١٠ عمال.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم أقل من ٦٠ جنيهًا = $\frac{١٠}{٥٠}$ × ١٠٠٪ = ٢٠٪

مثال ٢

الجدول التكرارى التالى يبين الأجر الأسبوعى بالجنيه لعدد ٥٠ عاملاً فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤	٥٠

والمطلوب تكوين الجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيله بيانيًا ثم إيجاد :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر.

الحـل

• نكون الجدول التكرارى المتجمع النازل كالتالى :

مجموعات الأجر	٥٤-	٥٨-	٦٢-	٦٦-	٧٠-
عدد العمال (التكرار)	٥	١٢	٢٢	٧	٤

٥٤ فأكثر ← ٥ + ١٢ + ٢٢ + ٧ + ٤ = ٥٠

٥٨ فأكثر ← ١٢ + ٢٢ + ٧ + ٤ = ٤٥

٦٢ فأكثر ← ٢٢ + ٧ + ٤ = ٣٣

٦٦ فأكثر ← ٧ + ٤ = ١١

٧٠ فأكثر ← ٤

٧٤ فأكثر ← صفر

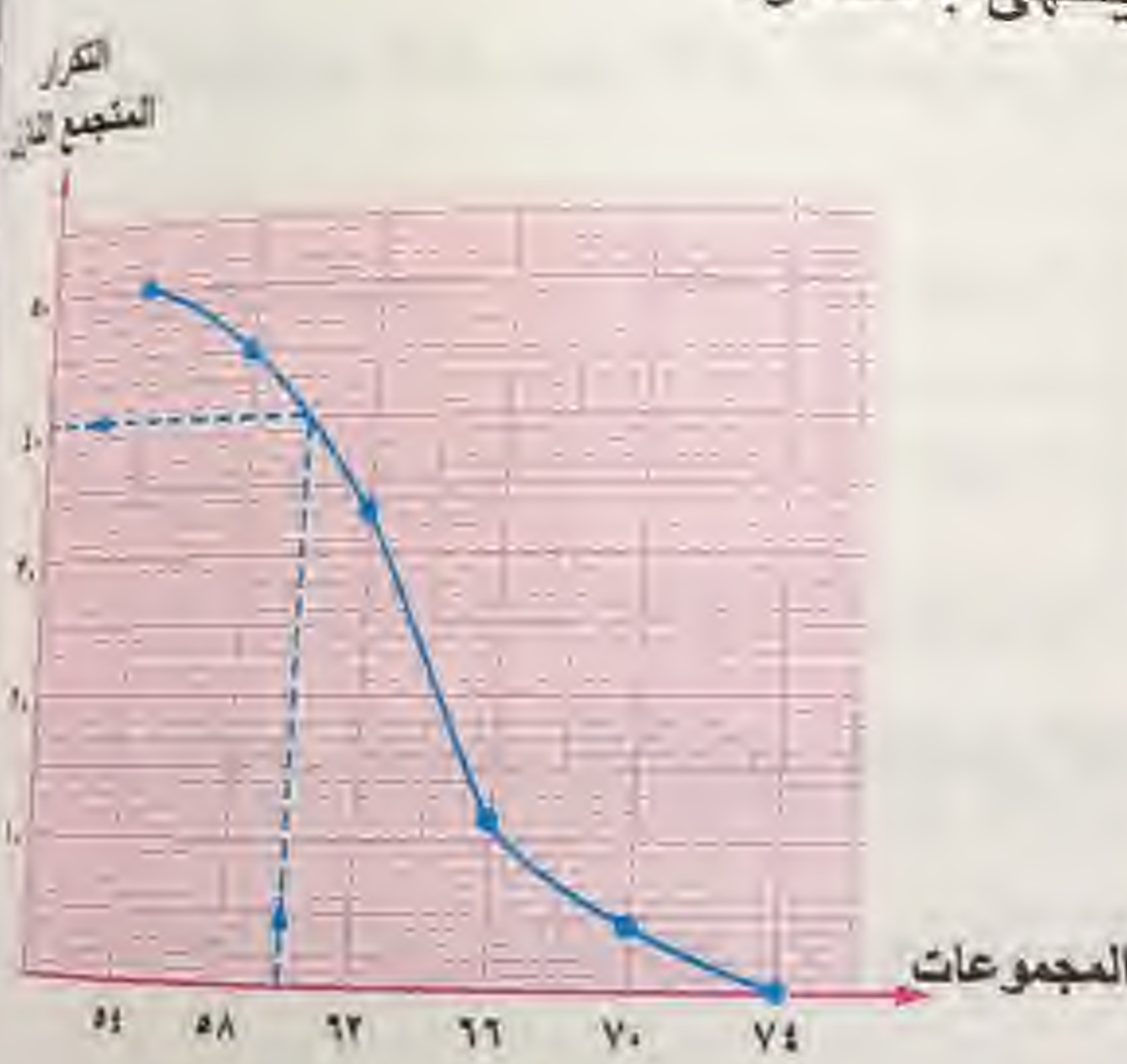
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل (الهابط)
٥٤ فأكثر	٥٠
٥٨ فأكثر	٤٥
٦٢ فأكثر	٣٣
٦٦ فأكثر	١١
٧٠ فأكثر	٤
٧٤ فأكثر	صفر

«الجدول التكرارى المتجمع النازل»

لاحظ أن :

التكرار المتجمع النازل يبدأ بالتكرار الكلى وينتهى بالصفر.

• ولتمثيل هذا الجدول نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد فنحصل على الشكل المقابل.



«المنحنى التكرارى المتجمع النازل»

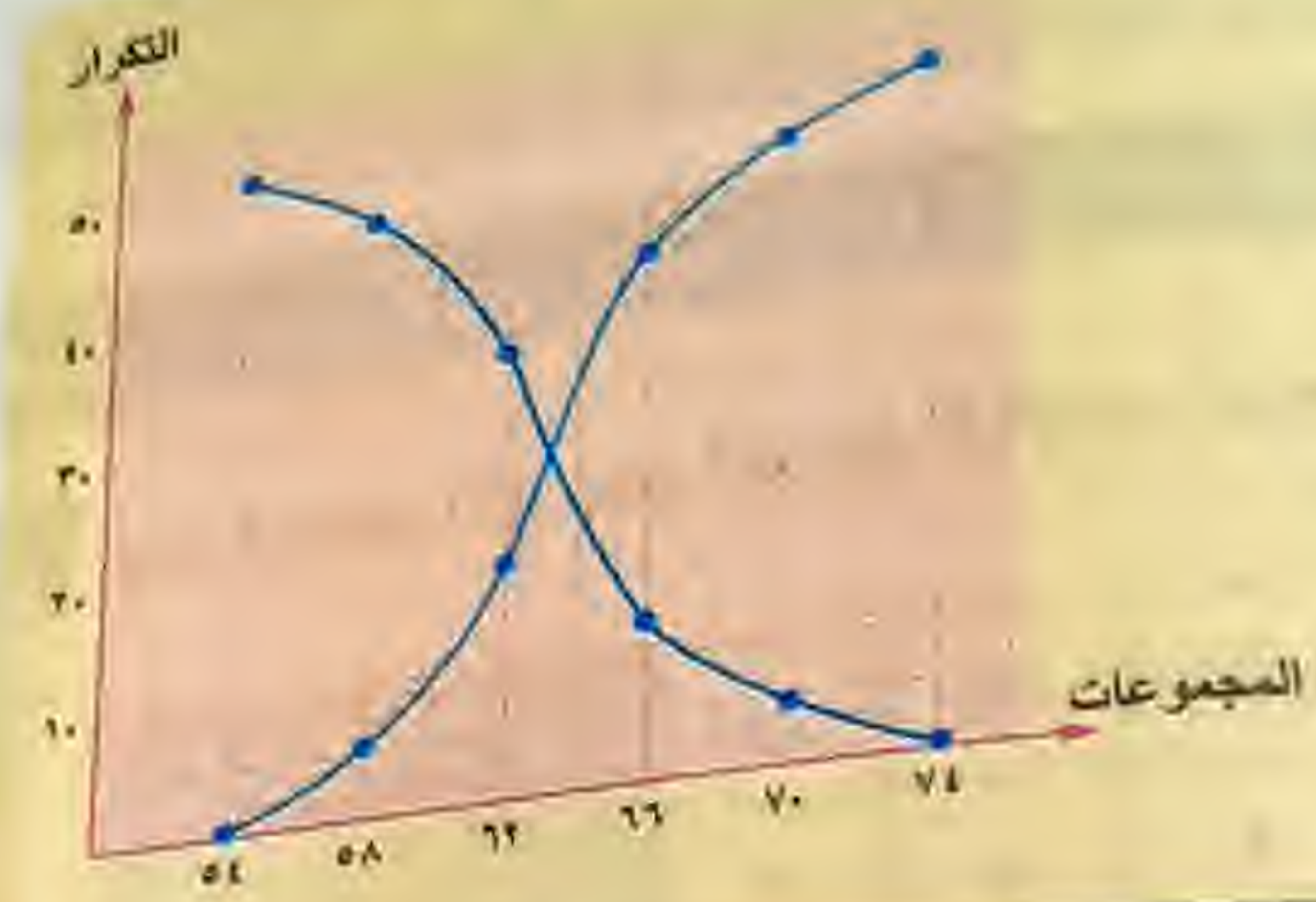
• ومن الرسم نجد أن :

١ عدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر = ٤٠ عاملاً.

٢ النسبة المئوية لعدد العمال الذين مرتباتهم ٦٠ جنيهًا فأكثر = $\frac{٤٠}{٥٠}$ × ١٠٠٪ = ٨٠ ٪

ملاحظة

يمكن رسم المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل لتوزيع تكرارى ما فى رسم واحد.



حاول بنفسك

الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٤٠ طالبًا فى امتحان مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٤	٨	١٢	١٠	٦	٤٠

ارسم : **١** المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

٢ المنحنى التكرارى المتجمع النازل.

على الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل وتمثيلهما بيانيًا

أولاً مسائل على المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

١ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى أحد الاختبارات:

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤

والمطلوب : رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع.

٢ الجدول التكرارى التالى يمثل درجات ٦٠ طالبًا فى مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٩	١١	١٣	١٧	١٠	٦٠

ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع وإذا كانت درجة ال[illegible]

فما هو عدد الطلبة الراسبين؟

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لعدد [illegible] حسب ساعات العمل [illegible]

المجموعات بالساعات	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	٩٠-	١٠٠-	[illegible]
عدد [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	١٢	[illegible]

١ ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع [illegible]

٢ [illegible]

ثانيًا مسائل على ...

٤ الجدول الآتى ...

المجموعات
التكرار

والمطلوب : رسم ...

٥ فصل دراسى به ...

المجموعات
التكرار

١ ارسم المنحنى ...

٢ من الرسم ...

٣ أوجد النسبة ...

٦ فيما يلى التوزيع ...

مجموعات ال...
عدد الأ...

أكمل الجدول ...

الأشخاص ال...

ثانيًا مسائل على المنحنى التكرارى المتجمع النازل

١ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر اليومى لمجموعة من العمال :

المجموعات	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٤	٢٤	٣٠	١٢	١٠	١٠٠

والمطلوب : رسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

٢ فصل دراسى به ٥٠ تلميذًا والجدول التالى يبين توزيع عدد ساعات المذاكرة بينهم يوميًا :

المجموعات	١-	٢-	٣-	٤-	٥-	٦-	٧-	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	١٢	١٥	٧	٦	٥٠

١ ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع.

٢ من الرسم أوجد عدد التلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يوميًا. «١٣ تلميذًا»

٣ أوجد النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يذاكرون ٦ ساعات فأكثر يوميًا. «٢٦٪»

٣ فيما يلى التوزيع التكرارى لمجموعة من الأشخاص عددهم ٦٠ شخصًا حسب أوزانهم بالكيلو جرام :

مجموعات الوزن بالكجم	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-	٧٥-	٨٠-	٨٥-	المجموع
عدد الأشخاص	٨	١٢	١٨	.....	٧	٣	٢	٦٠

أكمل الجدول ثم ارسم المنحنى التكرارى المتجمع النازل لهذا التوزيع وأوجد من الرسم عدد الأشخاص الذين يزن كل منهم ٦٨ كجم فأكثر. «٢٨ شخصًا»

ثالثًا مسائل على المنحنيين معًا

٧ ارسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	٤٠-	المجموع
التكرار	٤	٧	١٢	١٨	٢٠	١٩	١١	٦	٣	١٠٠

٨ فيما يلى التوزيع التكرارى الذى يبين درجات ١٠٠٠ طالب فى إحدى المواد :

النسبة المئوية	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
عدد الطلبة	٣٠	٧٠	١٦٠	٢٦٠	١٥٠	١٣٠	١١٠	٩٠	١٠٠٠

والمطلوب : ١ رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع.

٢ إيجاد عدد الطلبة الحاصلين على أقل من ٧٥٪

٣ إيجاد عدد الطلبة الحاصلين على ٨٥٪ فاكثر.

٩ البيانات التالية لدرجات ١٠٠ طالب فى امتحان تجريبى لمادة الرياضيات :

المجموعات	٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

١ كون كلًا من الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والنازل.

٢ ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والنازل على نفس ورقة الرسم البيانى.

٣ من الرسم أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة ، والحاصلين على ٣٥ درجة فاكثر.

٤ أوجد النسبة المئوية لنجاح الطلاب ، علمًا بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة.

٥ ما النسبة المئوية للطلاب الحاصلين على ٤٥ درجة فاكثر ؟

للمتفوقين

١٠ مصنع به ١٢٠ عاملاً تتراوح سنوات الخبرة لهم من ٥ سنوات إلى ٣٥ سنة والجدول المقابل يبين التوزيع التكرارى المتجمع النازل لعمال هذا المصنع حسب عدد سنوات الخبرة :

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
٥ فأكثر	١٢٠
١٠ فأكثر	١١٣
١٥ فأكثر	٩٣
٢٠ فأكثر	٦٤
٢٥ فأكثر	٢٧
٣٠ فأكثر	١٢
٣٥ فأكثر	٠

١ استنتج من الجدول المقابل جدول التوزيع التكرارى.

٢ كون جدول التكرار المتجمع الصاعد لهذا التوزيع.

٣ ارسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد لهذا التوزيع.

٤ استنتج من الرسم عدد عمال المصنع الذين تقل مدة خبرتهم عن ١٧,٥ سنة. «٤٠ عاملاً»



الدرس

3

الوســـط الحسابى

فى العام الماضى درسنا بعض مقاييس النزعة المركزية لمجموعة من القيم وهذه المقاييس هى الوسط الحسابى و الوسيط و المنوال.

وفى هذه الوحدة سنقوم بدراسة هذه المقاييس الثلاثة لمجموعة من البيانات منظمة فى جدول تكرارى ذى مجموعات.

تذكر أن

لحساب الوسط الحسابى لمجموعة من القيم نقوم بما يلى :

١ نوجد مجموع هذه القيم.

٢ نقسم الناتج على عدد هذه القيم.

أى أن : الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$

فمثلاً : إذا كانت درجات ٥ تلاميذ هى : ٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٤

فإن : الوسط الحسابى لدرجاتهم = $\frac{٢٥ + ٢٣ + ٢١ + ٢٢ + ٢٤}{٥}$ = ٢٣ درجة

لاحظ أن : ٢٣ × ٥ = ١١٥

، مجموع درجات التلاميذ الخمسة = ٢٥ + ٢٣ + ٢١ + ٢٢ + ٢٤ = ١١٥

أى أن : الوسط الحسابى هو القيمة التى لو أعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لـ مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية.

إيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

المثال التالى يوضح كيفية إيجاد الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى ذى مجموعات :

مثال

الجدول التالى يبين توزيع درجات ٥٠ تلميذًا فى مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٨	١٢	١٤	٩	٧	٥٠

والمطلوب إيجاد الوسط الحسابى لدرجات التلاميذ.

الحل

١ نحدد مراكز المجموعات تبعًا للقانون :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{حدها الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{٢}$$

فيكون مركز المجموعة الأولى $= \frac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$

، مركز المجموعة الثانية $= \frac{٢٠ + ٣٠}{٢} = ٢٥$ ... وهكذا

ونظرًا لأن طول المجموعات الجزئية متساوى وكل منها = ١٠

نعتبر الحد الأعلى للمجموعة الأخيرة = ٦٠ فيكون مركزها $= \frac{٥٠ + ٦٠}{٢} = ٥٥$

٢ نكون الجدول الرأسى الآتى :

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	مركز المجموعة × التكرار (م × ك)
١٠-	١٥	٨	١٢٠
٢٠-	٢٥	١٢	٣٠٠
٣٠-	٣٥	١٤	٤٩٠
٤٠-	٤٥	٩	٤٠٥
٥٠-	٥٥	٧	٣٨٥
المجموع		٥٠	١٧٠٠

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{١٧٠٠}{٥٠}$ = ٣٤ درجة.

حاول بنفسك

الجدول التالي يبين الأجر اليومي بالجنيهات لعدد ٥٠ عاملاً في أحد المصانع :

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

أوجد الوسط الحسابي لأجر العامل بالجنيهات.

تمارين 16

على الوسط الحسابى



أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١) الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{.......}}{\text{.......}}$

٢) مركز المجموعة = $\frac{\text{.......} + \text{.......}}{٢}$

٣) الوسط الحسابى للقيم : ٥ ، ١٢ ، ١٧ ، ٦ هو ....

٤) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٨ والحد الأعلى لنفس المجموعة ١٤ فإن مركزها = ...

٥) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ ومركزها ٩ فإن حدها الأعلى = ...

٦) إذا كان الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى هو ٣٩٫٤ ومجموع تكراراته ١٠٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة فى مركزها = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٢ - أ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٣ ، أ + ٢ هو ....

(أ) ١   (ب) ٢   (جـ) ٣   (د) ١٥

٢) إذا كان الوسط الحسابى لدرجات خمسة طلاب هو ٢٠ درجة فإن مجموع درجاتهم = ... درجة.

(أ) ٤   (ب) ١٥   (جـ) ٢٥   (د) ١٠٠

٣) مركز المجموعة الأولى من المجموعات : ٧- ، ١٣- ، ١٩- ، ٢٥- هو ....

(أ) ٦   (ب) ٧   (جـ) ١٠   (د) ١٣

٤) إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ما ١٤ ومركزها هو ١٠ فإن الحد الأدنى لها هو ....

(أ) ٥   (ب) ٦   (جـ) ٢٠   (د) ٢٤

٥) إذا كانت بداية مجموعة هى ٥ ومركزها هو ٧٫٥ فإن طول المجموعة هو ....

(أ) ٥   (ب) ٧٫٥   (جـ) ١٠   (د) ١٢٫٥

٣ أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	المجموع
التكرار	٦	٨	٤	٢	٢٠

٤ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠ طلاب فى امتحان مادة الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١	٢	٤	٢	١	١٠

١ احسب الوسط الحسابى لدرجات الطلاب.

٢ إذا كانت درجة النجاح هى ٣٠ فاحسب عدد الطلاب الراسبين.

٥ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجر الأسبوعى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع :

المجموعات	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	المجموع
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨	١٠٠

احسب الوسط الحسابى.

٦ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للأجور الإضافية لعدد ٣٠ عاملاً :

المجموعات	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	المجموع
التكرار	٢	٣	٥	٨	٦	٤	٢	٣٠

أوجد الوسط الحسابى لهذه الأجور.

٧ الجدول الآتى يبين توزيع ١٢٠ طالبًا حسب أطوالهم بالسنتيمترات :

الطول بالسنتيمتر	١٤٠-	١٤٤-	١٤٨-	١٥٢-	١٥٦-	١٦٠-	المجموع
التكرار	١٢	٢٠	٣٨	٢٢	١٧	١١	١٢٠

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

٨ فصل دراسى به ٥٠ تلميذًا ، والجدول الآتى يبين توزيع ساعات المذاكرة بينهم يوميًا :

عدد الساعات	١-	٢-	٣-	٤-	٥-	٦-	٧-	المجموع
عدد التلاميذ	٢	٣	٥	١٢	١٥	٧	٦	٥٠

١ احسب الوسط الحسابى لعدد ساعات المذاكرة اليومية.

٢ أوجد عدد التلاميذ الذين يذاكرون أقل من ٤ ساعات.

«٥,١ ساعة ، ١٠ تلاميذ»

٩ الجدول الآتى يبين درجات ٤٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

المجموعات	٥-	١٥-	....	٣٥-	٤٥-	المجموع
عدد الطلاب	٣	....	١٢	١٠	٥	٤٠

١ أكمل الجدول. ٢ احسب الوسط الحسابى.

٣ أوجد عدد الطلاب الذين لا تقل درجاتهم عن ٣٥

«٣١ درجة ، ١٥ طالبًا»

١٠ فيما يلى التوزيع التكرارى لأوزان ٣٠ طفلاً بالكيلو جرامات :

الوزن بالكيلو جرام	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	المجموع
التكرار	٢	٣	....	٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

«٢٠,٤ كجم»

١١ من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى :

المجموعات	١٠-	٢٠-	س -	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

أوجد : ١ قيمة كل من س ، ك

٢ الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

«س = ٣٠ ، ك = ١٥ ، ٣٩,١»

١٢ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس :

الوزن بالكيلو جرام	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
عدد التلاميذ	٧	٣ك	٤ك	١٠	٨	٤	٥٠

١ احسب قيمة ك ٢ أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع. «٣ ، ٤٤ كجم»

١٣ الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لعدد أيام الإجازات بأحد المصانع لعدد ٥٠ عاملاً :

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-
التكرار	٤	ك	٨	ك - ٢	٧	٥	١

أوجد : (١) قيمة ك (٢) الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

١٤ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات تلميذ فى الخمسة أشهر الأولى هى ٢٣.٨ فما الدرجة التى يجب أن يحصل عليها فى الشهر السادس ليكون الوسط الحسابى لدرجاته ٢٤ درجة ؟

١٥ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات مجدى خلال ٤ اختبارات هو ١٦ درجة فما هى الدرجة التى يجب على مجدى الحصول عليها فى الاختبار الخامس ليكون متوسطه عن الاختبارات كلها ١٨ درجة ؟

للمتفوقين

١٦ الجدول المقابل لإيجاد الوسط الحسابى لدرجات عدد م من التلاميذ فى أحد الاختبارات :

(١) استنتج قيمة كل من : أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، س ، ص ، ع ، م

(٢) أوجد الوسط الحسابى لهذه الدرجات.

المجموعات	مراكز المجموعات	التكرارات	التكرارات × مراكز المجموعات
٠-	أ	٥	١٠
٤-	٦	ب	٩٠
ء-	حـ	٣٠	٣٠٠
١٢-	هـ	ع	ص
١٦-	و	١٠	س
المجموع		م	١١٤٠



الدرس **4**

الوسيط

تذكر أن

الوسيط لمجموعة من القيم : هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساويًا لعدد القيم الأكبر منها .

ولإيجاد الوسيط نتبع الآتى :

نرتب القيم تصاعديًا أو تنازليًا

إذا كان عدد القيم فرديًا

فإن :

الوسيط هو : القيمة التى تقع فى الوسط تمامًا

فمثلًا : • إذا كانت القيم هى :

٤٢ ، ٢٣ ، ١٧ ، ٣٠ ، ٢٠

• فإننا نرتبها تصاعديًا كالتالى :

١٧ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٣٠ ، ٤٢

و يكون : الوسيط = ٢٣

إذا كان عدد القيم زوجيًا

فإن :

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{مجموع القيمتين اللتين تقعان فى الوسط}}{٢}$$

فمثلًا : • إذا كانت القيم هى :

٢٧ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ١٣ ، ٢١

• فإننا نرتبها تصاعديًا كالتالى :

١٣ ، ١٣ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٧

و يكون : $\text{الوسيط} = \frac{٢١+٢٣}{٢} = ٢٢$

إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانيًا

لإيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات بيانيًا نتبع الخطوات الآتية :

١ نكون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل ، ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع.

٢ نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

٣ نعين النقطة التى تمثل ترتيب الوسيط على المحور الرأسى ونرسم منها مستقيمًا أفقيًا يقطع المنحنى فى نقطة ونسقط من هذه النقطة عمودًا على المحور الأفقى يقطعه فى نقطة تمثل قيمة الوسيط والمثال التالى يوضح كيفية إيجاد الوسيط باستخدام المنحنيين.

مثال

فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى امتحان مادة الرياضيات :

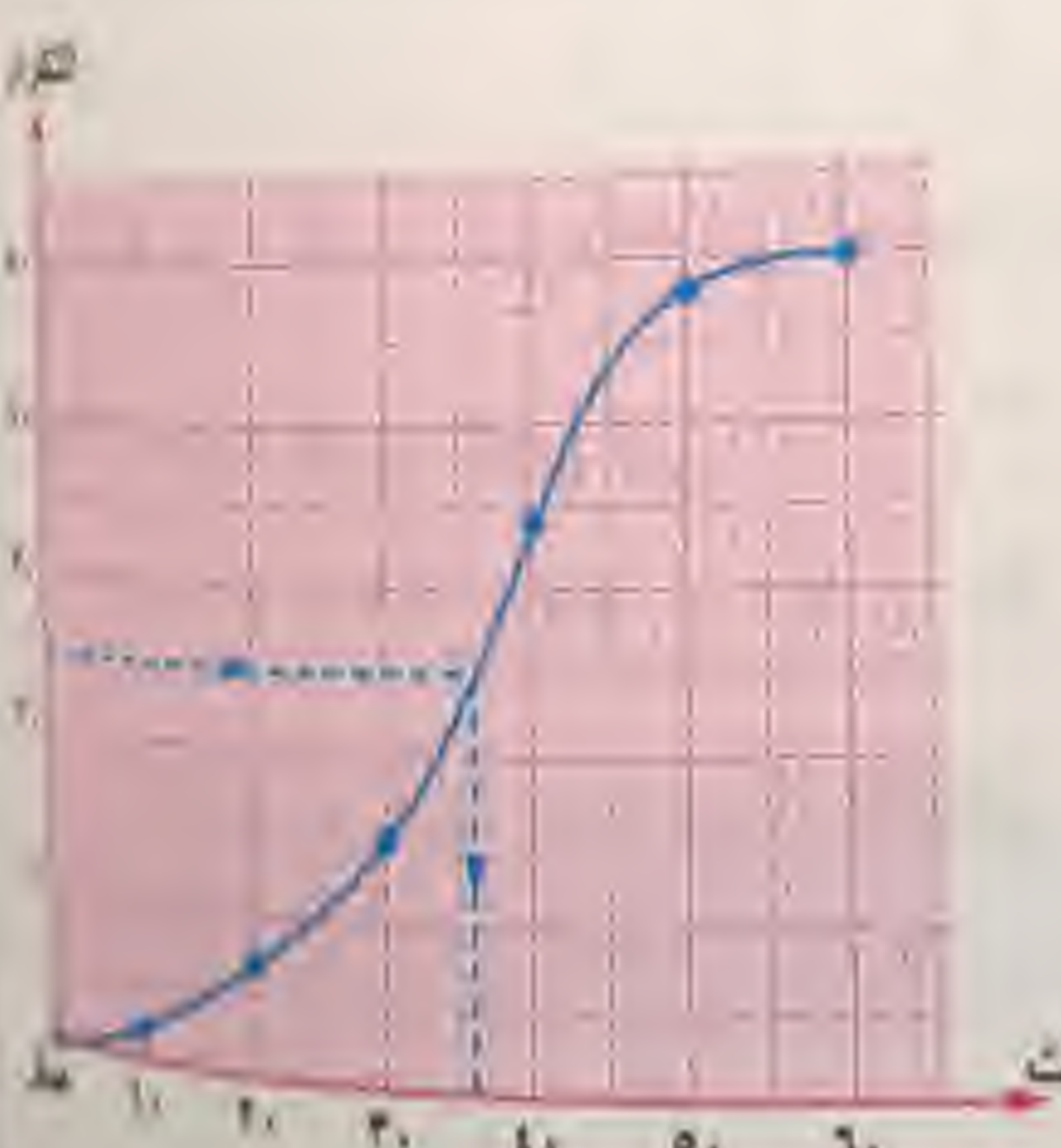
مجموعات الدرجات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	المجموع
عدد الطلاب	٢	٥	٨	١٩	١٤	٢	٥٠

أوجد الدرجة الوسيطة للطلاب.

الحل

أولًا : إيجاد الدرجة الوسيطة باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد :

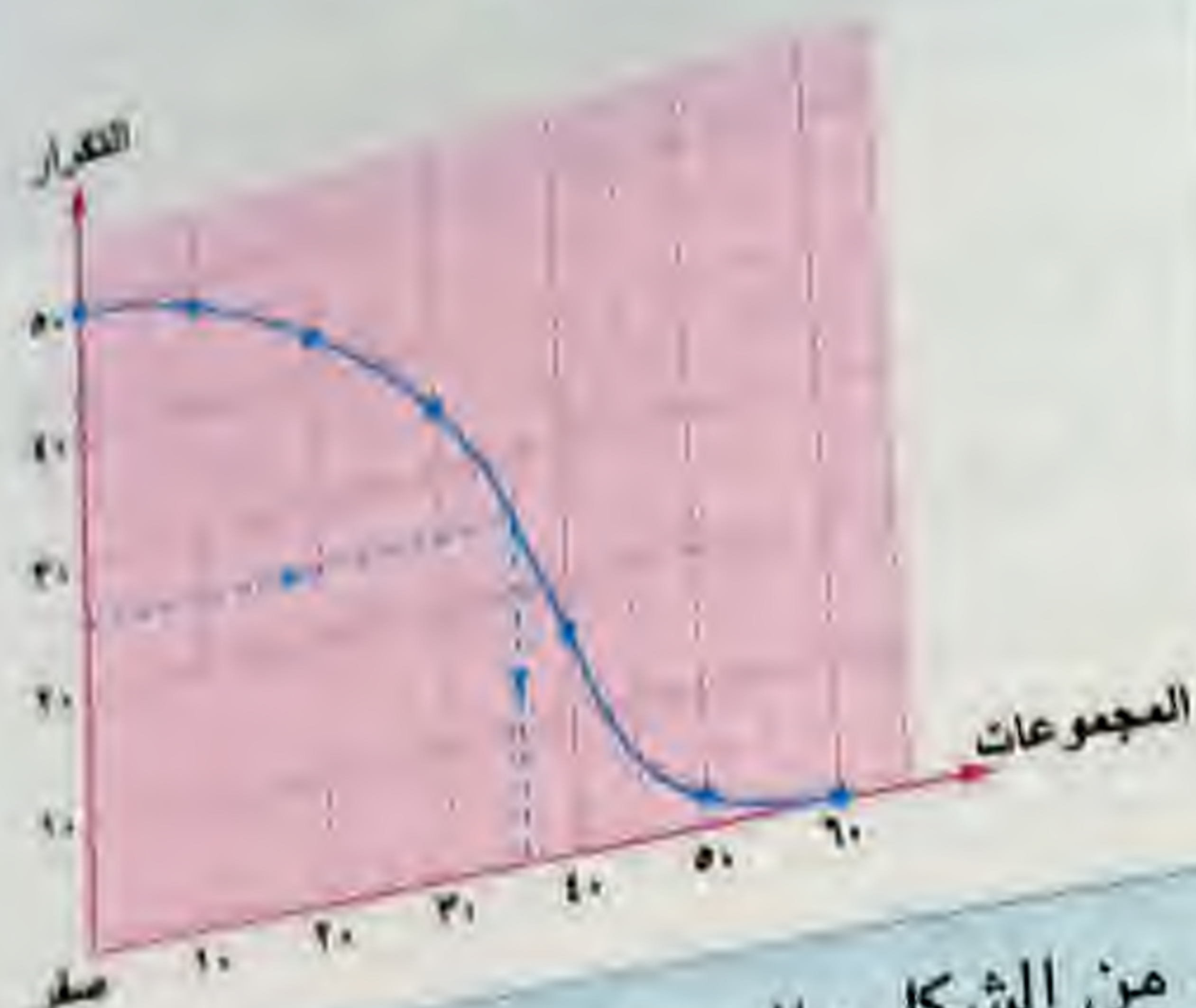
الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٠	صفر
أقل من ١٠	٢
أقل من ٢٠	٧
أقل من ٣٠	١٥
أقل من ٤٠	٣٤
أقل من ٥٠	٤٨
أقل من ٦٠	٥٠



∵ ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ ∴ من الشكل : الوسيط = ٣٦ تقريبًا

ثانيًا : إيجاد الدرجة الوسيطة باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع النازل :

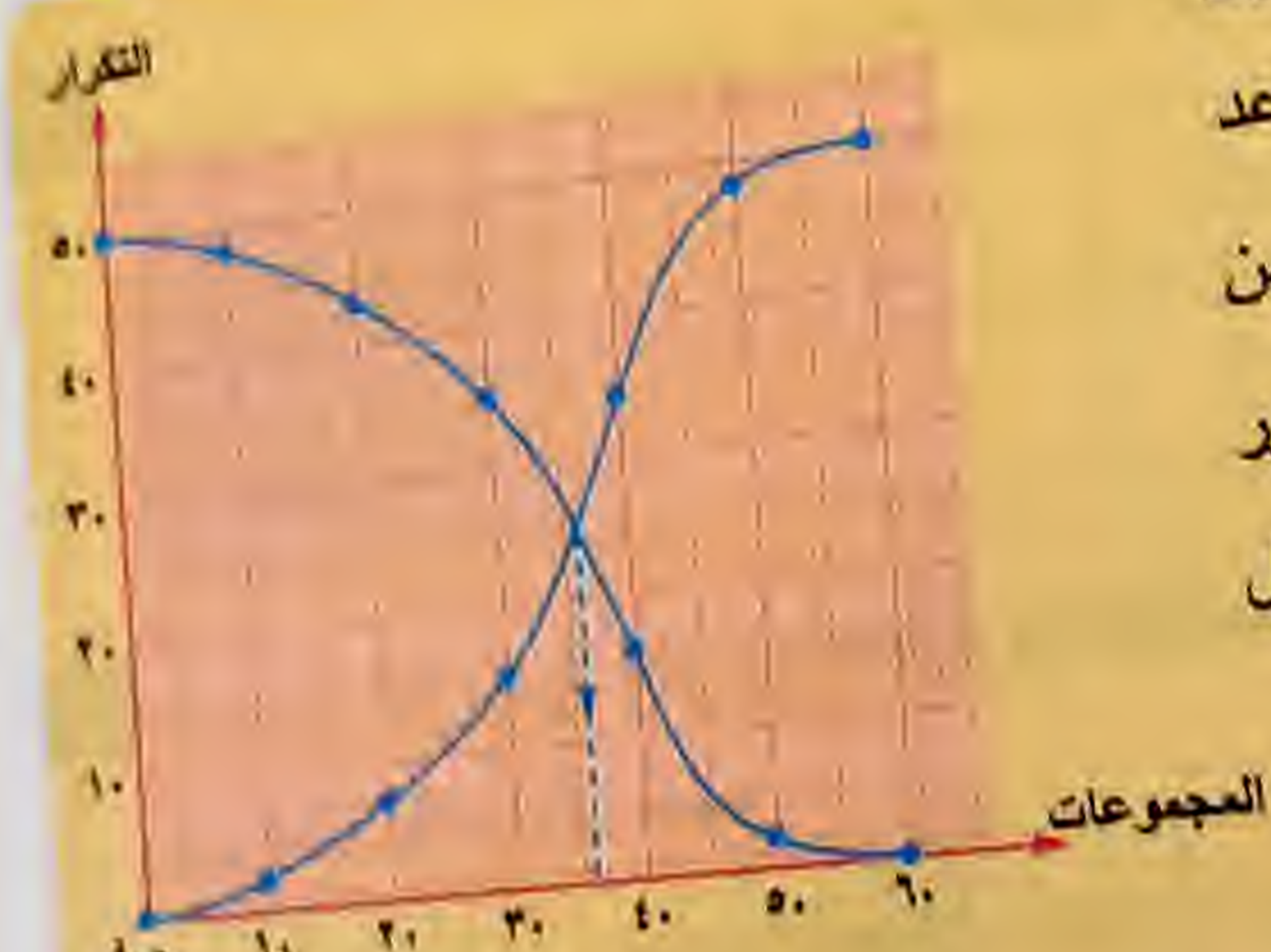
الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
٠ فأكثر	٥٠
١٠ فأكثر	٤٨
٢٠ فأكثر	٤٣
٣٠ فأكثر	٣٥
٤٠ فأكثر	١٦
٥٠ فأكثر	٢
٦٠ فأكثر	صفر



∵ ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥ ∴ من الشكل : الوسيط = ٣٦ تقريبًا

ملاحظة

يمكن إيجاد الوسيط بطريقة أكثر دقة عن طريق رسم كل من المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد والنازل فى شكل واحد فيتقاطعان فى نقطة ، ومن هذه النقطة نرسم مستقيمًا رأسيًا يلاقى المحور الأفقى فى نقطة تمثل الوسيط كما بالشكل المقابل نجد أن : الوسيط = ٣٦ تقريبًا .



حاول بنفسك

باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	المجموع
التكرار	٢	٤	٨	٦	٤	٢٤

تمارين 17

على الوسيط

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١) الوسيط لمجموعة القيم : ٩ ، ٤ ، ٨ ، ١ ، ٣ هو ....

٢) الوسيط لمجموعة القيم : ٣ ، ٧ ، ٧ ، ٩ ، ٥ ، ١١ هو ....

٣) ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٨ ، ٤ هو ....

٤) إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم يساوى ....

٥) إذا كان الوسيط لمجموعة القيم : ك + ١ ، ك + ٢ ، ك + ٥ ، ك + ٤ ، ك + ٣ حيث ك عدد صحيح موجب هو ١٣ فإن : ك = ...

٦) نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل تعين .... على محور المجموعات.

٢ باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	-٠	-٢	-٤	-٦	المجموع
التكرار	١	٢	٢	٥	١٠

[illegible]

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لمجموعة مكونة من ٤٠ شخصًا حسب النسبة المئوية لدرجة الذكاء لكل منهم :

مجموعات النسب المئوية للذكاء	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	المجموع
عدد الأشخاص	١	٣	٨	١٤	١٠	٤	٤٠

احسب من منحنى التكرار المتجمع الصاعد نسبة الذكاء الوسيطة لأفراد هذه المجموعة. «٧٥٪ تقريبًا»

٤ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد ١٠٠ مصنع حسب عدد ساعات العمل الأسبوعية :

المجموعات (بالساعة)	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	-١٠٠	المجموع
عدد المصانع	٥	٨	١٢	٢٨	٣٣	١٤	١٠٠

أوجد باستخدام منحنى التكرار المتجمع النازل العدد الوسيط لساعات العمل لهذه المصانع. «٨٩٫٥٠ ساعة تقريبًا»

٥ فيما يلى توزيع الأجور بالجنيه لبعض العاملين فى أحد المصانع :

مجموعات الأجور	-٣٠٠	-٤٠٠	-٥٠٠	-٦٠٠	-٧٠٠	المجموع
عدد العمال	٨	١٢	١٨	٧	٥	٥٠

ارسم منحنى التكرار المتجمع النازل لهذا التوزيع ثم أوجد الأجر الوسيط. «٥٢٠ جنيهًا تقريبًا»

٦ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٦٠ طالبًا فى اختبار للرياضيات :

مجموعات الدرجات	-٥	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	المجموع
عدد الطلاب	٢	٥	١٤	٢٠	١٣	٥	١	٦٠

أوجد الدرجة الوسيطة.

«٢٢ درجة تقريبًا»

٧ الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٢٠ طفلاً بالكيلو جرام :

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

أوجد الوزن الوسيط بالكيلو جرام باستخدام المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع.

«٢٩ كجم تقريبًا»

٨ الجدول الآتى يبين توزيع طلبة إحدى المدارس الثانوية بأحد مراكز الوجه البحرى حسب أعمارهم بالسنة :

مجموعات العمر بالسنة	-١٤	-١٥	-١٦	-١٧	-١٨	-١٩
عدد الطلبة	٩٠	١٣٠	١١٠	٨٠	٧٠	٢٠

المطلوب رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل لهذا التوزيع وإيجاد العمر الوسيط.

«١٦,٣ سنة تقريبًا»

٩ فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ٩٠ تلميذًا فى أحد الاختبارات الشهرية :

مجموعات الدرجات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	المجموع
عدد التلاميذ	٨	١٠	٢٤	٢١	١٢	٩	٦	٩٠

أوجد الدرجة الوسيطة مستخدمًا المنحنيين التكراريين المتجمعين الصاعد والنازل.

«٢٢,٥٠ درجة تقريبًا»

١٠ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد : ١ الوسط الحسابى لدرجة الطالب. ٢ الوسيط.

«١٦,٨٠ ، ١٧,٦ تقريبًا»

١١ من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى :

المجموعات	١٠-	٢٠-	س-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	المجموع
التكرار	١٠	١٧	٢٠	٣٢	ك + ٢	٤	١٠٠

١ أوجد قيمة كل من س ، ك

«س = ٣٠ ، ك = ١٥»

٢ ارسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ، ثم احسب الوسيط.

«٤١ تقريبًا»



الدرس
5

المنـــوال

تذكر أن

المنوال لمجموعة من القيم : هـو القيمة الأكثر شيوعًا فى هـذه المجموعة أو هو القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها .

مثلاً : المنوال لمجموعة القيم :
٧ ، ٣ ، ٤ ، ١ ، ٧ ، ٩ ، ٧ ، ٤ هو ٧

إيجاد المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات

فيما يلى مثال يوضح كيفية إيجاد المنوال لتوزيع تكرارى ذى مجموعات.

مثال

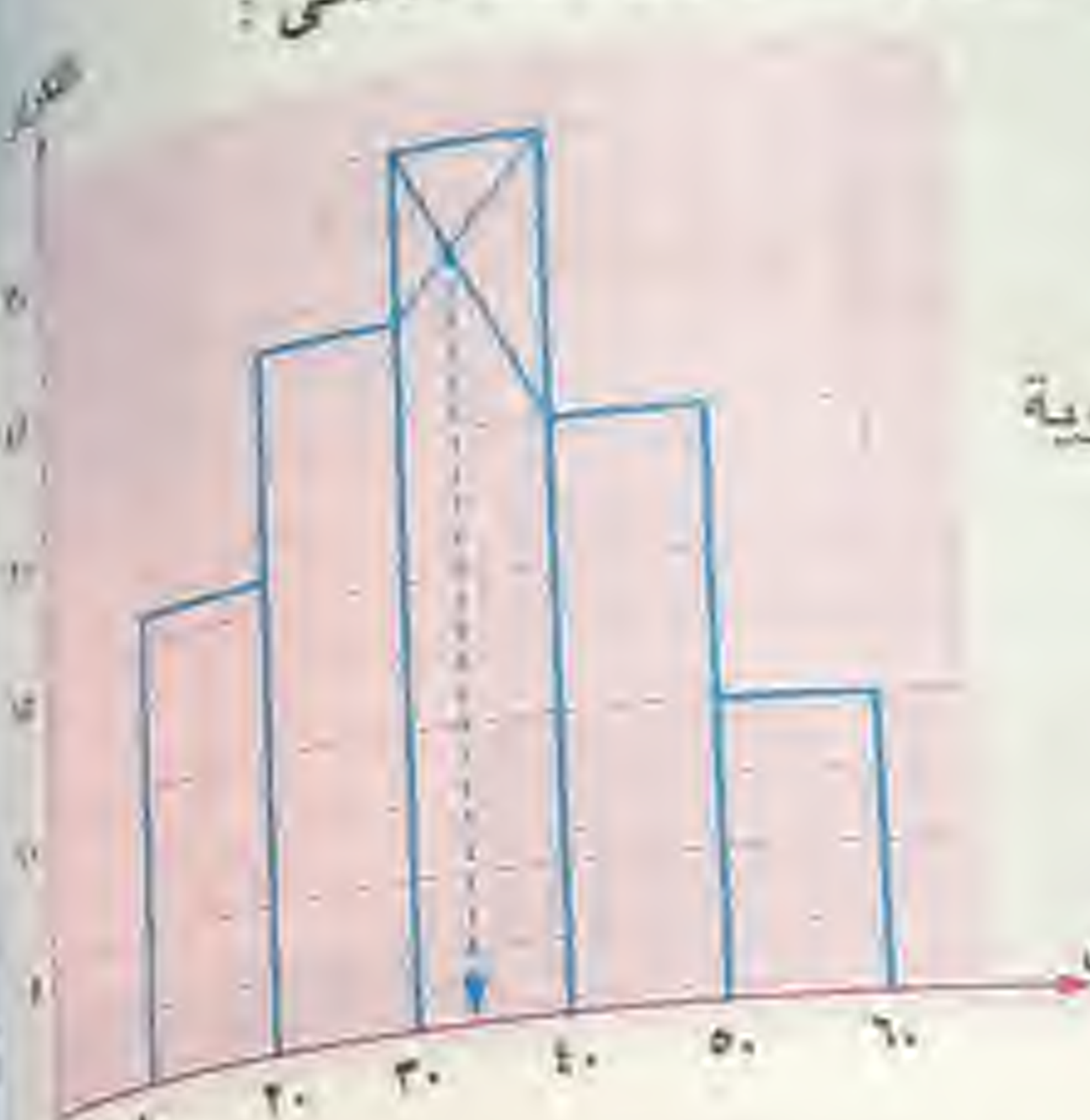
فيما يلى التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
عدد التلاميذ	١٦	٢٤	٣٠	٢٠	١٠	١٠٠

أوجد الدرجة المنوالية لهؤلاء التلاميذ.

الحـــل

يمكن إيجاد المنوال لهذا التوزيع بيانيًا باستخدام المدرج التكرارى وذلك كالآتى :



١ نرسم محورين متعامدين أحدهما أفقيًا والآخر رأسيًا لتمثيل تكرار كل مجموعة.

٢ نقسم المحور الأفقى إلى عدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب لتمثيل المجموعات.

٣ نقسم المحور الرأسى إلى عدد من الأقسام المتساوية بمقياس رسم مناسب بحيث يمكن تمثيل أكبر تكرار فى المجموعات.

٤ نرسم مستطيلاً قاعدته هى المجموعة (١٠–) وارتفاعه يساوى التكرار (١٦)

٥ نرسم مستطيلاً ثانيًا ملاصقًا للمستطيل الأول قاعدته هى المجموعة (٢٠–) وارتفاعه يساوى التكرار (٢٤)

٦ نكرر رسم باقى المستطيلات المتلاصقة حتى آخر مجموعة (٥٠–)

٧ نحدد المجموعة الأكثر تكرارًا ثم نرسم خطين كالموضحين فى الشكل فيتقاطعان فى نقطة ومنها نرسم مستقيمًا رأسيًا يقطع المحور الأفقى فى نقطة هى القيمة المنوالية.

أى أن القيمة المنوالية ≈ ٣٤

حاول بنفسك

أوجد المنوال من التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٢–	٤–	٦–	٨–	١٠–	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

تمارين ١٥

على المنــــوال

اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ المنوال لمجموعة من القيم هو ....

٢ المنوال للقيم : ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٥ ، ٩ هو ....

٣ المنوال للقيم : ٨ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ٨ هو ....

٤ إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، أ ، ٥ ، ٣ هو ٣ فإن : أ = ...

٥ إذا كان المنوال للقيم : ١٢ ، ٧ ، س + ١ ، ٧ ، ١٢ هو ٧ فإن : س = ...

٦ إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢ س هو ٤ فإن : س = ...

٢ مصنع به ٦٠٠ عامل أخذت منه عينة مكونة من ١٢٠ عاملاً وتمثل المجتمع تمثيلاً جيدًا فوجد أن توزيع أعمارهم بالسنين كما فى الجدول الآتى :

مجموعات العمر	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
عدد العمال	١٢	١٧	١٨	٤٠	٢٥	٨	١٢٠

ارسم المدرج التكرارى واستنتج منه العمر المنوالى. «٤٣ سنة»

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	المجموع
عدد التلاميذ	٢	١٠	١٥	٤٠	٢٥	٦	٢	١٠٠

أوجد الدرجة المنوالية باستخدام المدرج التكرارى لهذا التوزيع. «٢٤,٥ درجة»

٤ فيما يلى التوزيع التكرارى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع حسب أجورهم اليومية

مجموعات الأجر بالجنيهات	-١٠	-١٥	-٢٠	-٢٥	-٣٠	-٣٥	-٤٠	المجموع
عدد العمال	٦	١٢	١٦	٢٤	٢٠	١٤	٨	١٠٠

والمطلوب رسم المدرج التكرارى لهذا التوزيع واستنتاج الأجر المنوالى للعامل منه

٥ أوجد المنوال للتوزيع التكرارى التالى لدرجات ٤٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	المجموع
التكرار	٣	٤	١٢	٨	٧	٦	٤٠

٦ فيما يلى التوزيع التكرارى لأعمار ٤٥ فردًا :

مجموعات العمر بالسنوات	-١٢	-١٤	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢	-٢٤	المجموع
عدد الأفراد	٥	٧	٨	١٢	٦	٤	٣	٤٥

أوجد العمر المنوالى.

٧ الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لأطوال ٢٠٠ تلميذ فى إحدى المدارس :

الطول بالسنتيمتر	-١١٠	-١١٥	-١٢٠	-١٢٥	-١٣٠	-١٣٥	-١٤٠	المجموع
عدد التلاميذ	١٠	١٢	٢٨	٣٥	٦٠	٤٠	١٥	٢٠٠

ارسم المدرج التكرارى لهذا التوزيع وأوجد الطول المنوالى.

٨ الجدول الآتى يبين توزيع ١٠٢ بقرة حسب كمية اللبن الأسبوعية بالجالون :

مجموعات اللبن بالجالون	-١٤	-١٦	-١٨	-٢٠	-٢٢	-٢٤	المجموع
عدد البقرات	٨	١٦	٢٨	٢٠	١٨	١٢	١٠٢

استخدم المدرج التكرارى لهذا التوزيع لإيجاد المنوال لكمية اللبن الأسبوعية.

٩ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى للدرجات التى حصل عليها ١٠٠ تلميذ فى مادة الرياضيات فى آخر العام :

مجموعات الدرجات	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
عدد التلاميذ	٤	٦	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٢	٧	٥	١٠٠

ارسم المدرج التكرارى لهذا التوزيع وأوجد الدرجة المنوالية. «٤٥,٥٠ درجة»

١٠ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ١٠٠ طفل بالكيلو جرام :

الوزن بالكجم	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٢٤	١٧	٩	١٠٠

أوجد الوزن المنوالى. «٢٠,٨ كجم»

١١ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس :

الوزن بالكجم	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
عدد التلاميذ	ك + ٤	٣ ك	٤ ك	٣ ك + ١	٣ ك − ١	ك + ١	٥٠

[١] أوجد قيمة ك [٢] ارسم المدرج التكرارى وأوجد الوزن المنوالى. «٤٣ كجم»

١٢ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى ذى المجموعات متساوية المدى للأجور الأسبوعية لعدد ١٠٠ عامل بأحد المصانع :

مجموعات الأجر بالجنيه	٧٠-	٨٠-	٩٠-	١٠٠-	س-	١٢٠-	١٣٠-
عدد العمال	١٠	١٣	ك − ٤	٢٠	١٦	١٤	١١

أوجد : [١] قيمة كل من س ، ك [٢] الأجر المنوالى بالجنيه. «١٠٥ جنيهات»

١٣ فيما يلي التوزيع التكراري لعدد ١٠٠ عامل من عمال البناء حسب عدد ساعات العمل الأسبوعية :

مجموعات ساعات العمل	-٣٥	-٤٥	-٥٥	-٦٥	-٧٥	-٨٥	المجموع
عدد العمال	١٦	٣٠	٢٢	٢٠	٨	٤	١٠٠

المطلوب إيجاد :

١ الوسط الحسابي

٢ الوسيط.

٣ المنوال.

١٤ فيما يلي التوزيع التكراري للحافز الأسبوعي لعدد ١٠٠ عامل في أحد المصانع :

الحوافز بالجنيه	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠
عدد العمال	١٠	ك	٢٢	٢٦	٢٠	٨

١ احسب قيمة ك

٢ أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.

٣ أوجد القيمة المنوالية للحافز الأسبوعي باستخدام المدرج التكراري.

١٥ الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأوزان ٥٠ تلميذًا بالكيلو جرام بإحدى المدارس :

الوزن بالكجم	-٣٠	-٣٥	-٤٠	-٤٥	-٥٠	-٥٥	المجموع
عدد التلاميذ	٧	٣ ك	٤ ك	١٠	٨	٤	٥٠

١ أوجد قيمة ك

٢ احسب الوسط الحسابي.

٣ ارسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

٤ ارسم المدرج التكراري وأوجد الوزن المنوالي.

٥ أوجد الوسيط.

ملخص الوحدة الثالثة

- يمكن تمثيل الجدول التكرارى ذى المجموعات بالمنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو المنحنى التكرارى المتجمع النازل.

- المدى هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة.

- الوسط الحسابي لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$

- الوسط الحسابي لتوزيع تكراري ذي مجموعات = $\frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}}$

حيث ك التكرار ، م مركز المجموعة ويساوى $\frac{\text{حدها الأدنى + حدها الأعلى}}{٢}$

- الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساويًا لعدد القيم الأكبر منها.

وإذا كان عدد القيم فرديًا فإن : الوسيط هو القيمة التى تقع فى الوسط تمامًا.

وإذا كان عدد القيم زوجيًا فإن : الوسيط = $\frac{\text{مجموع القيمتين اللتين تقعان فى الوسط}}{٢}$

- نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل تعين الوسيط على محور المجموعات.

- المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر شيوعًا فى هذه المجموعة أو هو القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها.



امتحانات على الوحدة الثالثة

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الوسيط لمجموعة القيم : ١٥ ، ٢٢ ، ٩ ، ١١ ، ٣٣ هو ....

(أ) ٩ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٩٠

٢ الوسط الحسابى للقيم : ١٩ ، ٣٢ ، ٢٧ ، ٦ ، ٦ هو ....

(أ) ٩٠ (ب) ٣٢ (جـ) ١٨ (د) ٦

٣ إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ٥ ، أ ، ٣ هو ٣ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٤ إذا كان الوسيط لمجموعة القيم : ك + ١ ، ك + ٢ ، ك + ٥ ، ك + ٤ ، ك + ٢

هو ١٣ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ١٢

٥ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات خمسة طلاب هو ٣٠ درجة

فإن مجموع درجاتهم يساوى .... درجة.

(أ) ١٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

---

٢ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الخامس فإن عدد هذه القيم يساوى ....

٢ إذا كان المنوال للقيم : ١٥ ، ٩ ، س + ٦ ، ٩ ، ١٥ هو ٩ فإن : س = ...

٣ نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط تعين على المحور الأفقى ....

٤ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ١ ، ٦ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ك هو ٧ فإن : ك = ...

٥ المجموعة التى حدها الأدنى = ٢ وحدها الأعلى = ٦ يكون مركزها = ...

٣ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠ طلاب فى امتحان الرياضيات :

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	١	٢	٤	٢	١	١٠

١ احسب الوسط الحسابى لدرجات الطلاب.

٢ إذا كانت درجة النجاح هى ٣٠ فاحسب عدد الطلاب الراسبين.

٤ أوجد باستخدام التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٠-	٢-	٤-	٦-	ك -	المجموع
التكرار	م	٥	٨	٧	٦	٣٠

١ قيمتى ك ، م **٢** الوسيط باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد لهذا التوزيع.

٥ أوجد المنوال للتوزيع التكرارى التالى لدرجات ٤٠ طالبًا فى أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	المجموع
التكرار	٤	٨	١٢	٧	٥	٤	٤٠

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ هو ....

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (جـ) الخامس. (د) السادس.

٢ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ك - ١ ، ك هو ١٨

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٢٩ (د) ٩٠

٣ المنوال للقيم : ١٤ ، ١١ ، ١٠ ، ١١ ، ١٤ ، ١٥ ، ١١ هو ....

(أ) ١٤ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

٤ الوسط الحسابى للقيم : ٣ - أ ، ٥ ، ١ ، ٤ ، ٢ + أ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ١٥

٥ مجموعة مركزها = ١٠ وحدها الأدنى = ٤ فإن حدها الأعلى = ...

(أ) ١٠ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٦

٢ أكمل ما يأتى :

١ نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط تعين على المحور الرأسى ....

٢ القيمة الأكثر تكرارًا لمجموعة من القيم تسمى ....

٣ إذا كان الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى هو ٣٥,٧ ومجموع تكراراته ٢٠٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة فى مركزها يساوى ....

٤ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو التاسع فإن عدد القيم يساوى ....

٥ إذا كان المنوال للقيم : ٩ ، ٨ ، ٩ ، ص ، ٨ هو ٨ فإن : $\sqrt[3]{ص}$ = ...

٣ أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

٤ أوجد باستخدام التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٠-	٢-	ك -	٦-	٨-	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	م + ٢	١	٢٠

١ قيمتى ك ، م ٢ الوسيط باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الهابط لهذا التوزيع

٥ مصنع به ٦٠٠ عامل أخذت منه عينة مكونة من ١٢٠ عاملًا تمثل المجتمع تمثيلًا جيدًا فوجد أن توزيع أعمارهم بالسنين كما فى الجدول الآتى :

مجموعات العمر	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	المجموع
عدد العمال	١٢	١٦	١٨	٤٠	٢٥	٩	١٢٠

ارسم المدرج التكرارى واستنتج منه العمر المنوالى.

مشروع بحثى



على الوحدة الثالثة

أهداف المشروع

- تنظيم البيانات فى جداول تكرارية ذات مجموعات.
- تكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وتمثيله.
- إيجاد الوسط الحسابى والمنوال لمجموعة من البيانات منظمة فى جدول تكرارى ذى مجموعات.
- إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى ذى مجموعات.
- تقدير دور الإحصاء فى الحياة العملية.

المطلوب

« يستخدم الإحصائيون العديد من المقاييس لقياس النزعة المركزية منها : الوسط الحسابى، والوسيط، والمنوال »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- عرف الوسط الحسابى، والوسيط، والمنوال.
- سجل درجات أصدقائك فى الفصل فى أحد امتحانات مادة الرياضيات، ثم قم بما يلى :
  - نظم هذه البيانات فى جدول التفريغ ومنه كون الجدول التكرارى ذى المجموعات.
  - من الجدول التكرارى ذى المجموعات احسب الوسط الحسابى لدرجات أصدقائك.
  - باستخدام الجدول التكرارى ذى المجموعات، ارسم المدرج التكرارى ومنه أوجد الدرجة المنوالية.
  - كوّن الجدول التكرارى المتجمع الصاعد، ثم ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد ومنه أوجد الدرجة الوسيطة.



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ أكمل ما يأتى :

١ سلحفاة تقطع ٨٠ مترًا فى الساعة فإنها تقطع ٨ أمتار فى .... دقائق

٢ مجموع الأعداد الحقيقية فى الفترة [-١٢ ، ١٢] يساوى ....

٣ إذا كان : ○ + □ = ٢٠ ، ○ + ○ + □ = ٢٥

فإن : ○ = ...

٤ فى ثلاث مباريات لقذف كرة البولينج حصلت سارة على ١٣٩ ، ١٤٣ ، ١٤٤ نقطة

عدد النقط التى تحتاجها سارة فى المباراة الرابعة ليكون متوسط النقاط فى الـ...

١٤٥ نقطة يساوى ....

٥ صندوقا تفاح بهما ٥٤ كجم من التفاح ، الأول به ١٢ كجم زيادة عن الثانى فإن...

الكيلو جرامات من التفاح فى الصندوق الثانى يساوى .... كجم

٦ ٣٠٠ ÷ ٢٠٠ = ١ ÷ ....

٧ (٢٠١ + ٢٠٢ + ٢٠٣ + ... + ٢٢٥) - (١ + ٢ + ٣ + ... + ٢٥) = ...

٨ إذا كان أربعة أمثال عدد هو ٤٨ فإن : $\frac{١}{٣}$ هذا العدد = ...

٩ جمال عنده ٣ أخوات ، ٥ أخوة. أخته سارة عندها س أخت ، ص أخ

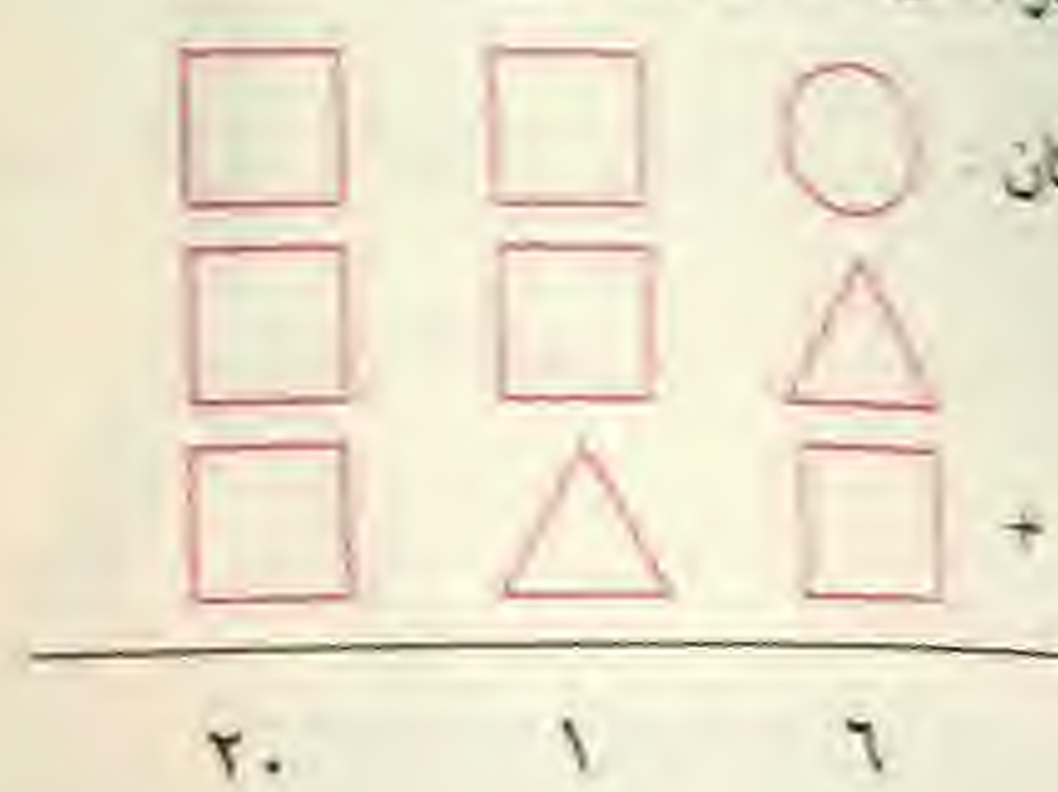
فإن : س ص = ...

إذا كان: أ + ب + حـ = ٢٦ ، أ + ب = ١٥ ، ب + حـ = ٢٠

فإن: ب = ...

يمكن لثلاث فتيات إنجاز عمل ما فى ٣٦ ساعة ، فإن عدد الساعات اللازمة لأربع فتيات لإنجاز نفس العمل يساوى ....

إذا كان:



فإن: □ = ... ، △ = ... ، ○ = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد ٣,٠١٥ يقع على خط الأعداد بين ....

(أ) $\frac{٥}{٢}$ ، ٣ (ب) $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{١١}{٣}$

(جـ) ٣ ، $\frac{١٦}{٥}$ (د) ٣,١٢ ، ٣,١٥

٢ أى من الأعداد الآتية يقع بين ٠,٠٧ ، ٠,٠٨ ؟

(أ) ٠,٠٠٠٧٥ (ب) ٠,٠٠٧٥ (جـ) ٠,٠٧٥ (د) – ٠,٧٥

٣ أى مما يأتى مختلف فى القيمة ؟

(أ) ١ ÷ ٩ + ٩ – ١ (ب) ١ + ٩ ÷ ٩ – ١

(جـ) ١ – ٩ + ٩ × ١ (د) ١ × ٩ – ٩ + ١

٤ إذا كانت : س تمثل عددًا سالبًا فأى من الآتى يمثل عددًا موجبًا ؟

(أ) $س^٢$ (ب) $س^٣$ (جـ) ٢ س (د) $\frac{س}{٢}$

٥ أكبر الأعداد الآتية هو ....

(أ) −١,٢٥ (ب) −٠,١٢٥ (جـ) −٠,٠١٢٥ (د) −...١٢٥

٦ أفضل تقدير للعدد المقابل للنقطة س هو ....



(أ) ١,١ (ب) ١,٢ (جـ) ١,٥ (د) ١,٧

٧ إذا كان : ١٠٪ من س يساوى ص فإن : س = ...

(أ) ٠,١ ص (ب) ص (جـ) ٩ ص (د) ١٠ ص

٨ إذا كان : س = $(-٢)^{٤}$ ، ص = $-٢^{٤}$ فإن : ....

(أ) س = ص (ب) س < ص (جـ) س > ص (د) س ≥ ص

٩ $\sqrt{\sqrt[٤]{٨١ \times ٨١ \times ٨١ \times ٨١}}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

١٠ لأى عدد ك فإن : ك + ك + (ك × ك × ك) يمكن كتابتها على الصورة ....

(أ) $٢ ك^{٢} + ٣ ك$ (ب) ٥ ك (جـ) $ك^{٥}$ (د) $٢ ك + ك^{٣}$

١١ ماكينة تنتج نوعين من القضبان أحدهما لونه أسود وطوله (١٠ ± ٠,٥) سم والآخر أبيض وطوله (٦ ± ٠,٥) سم ، إذا وضع قضيبان كما هو مبين فى الشكل المقابل فإن أصغر فرق ممكن بين طوليهما يكون ....

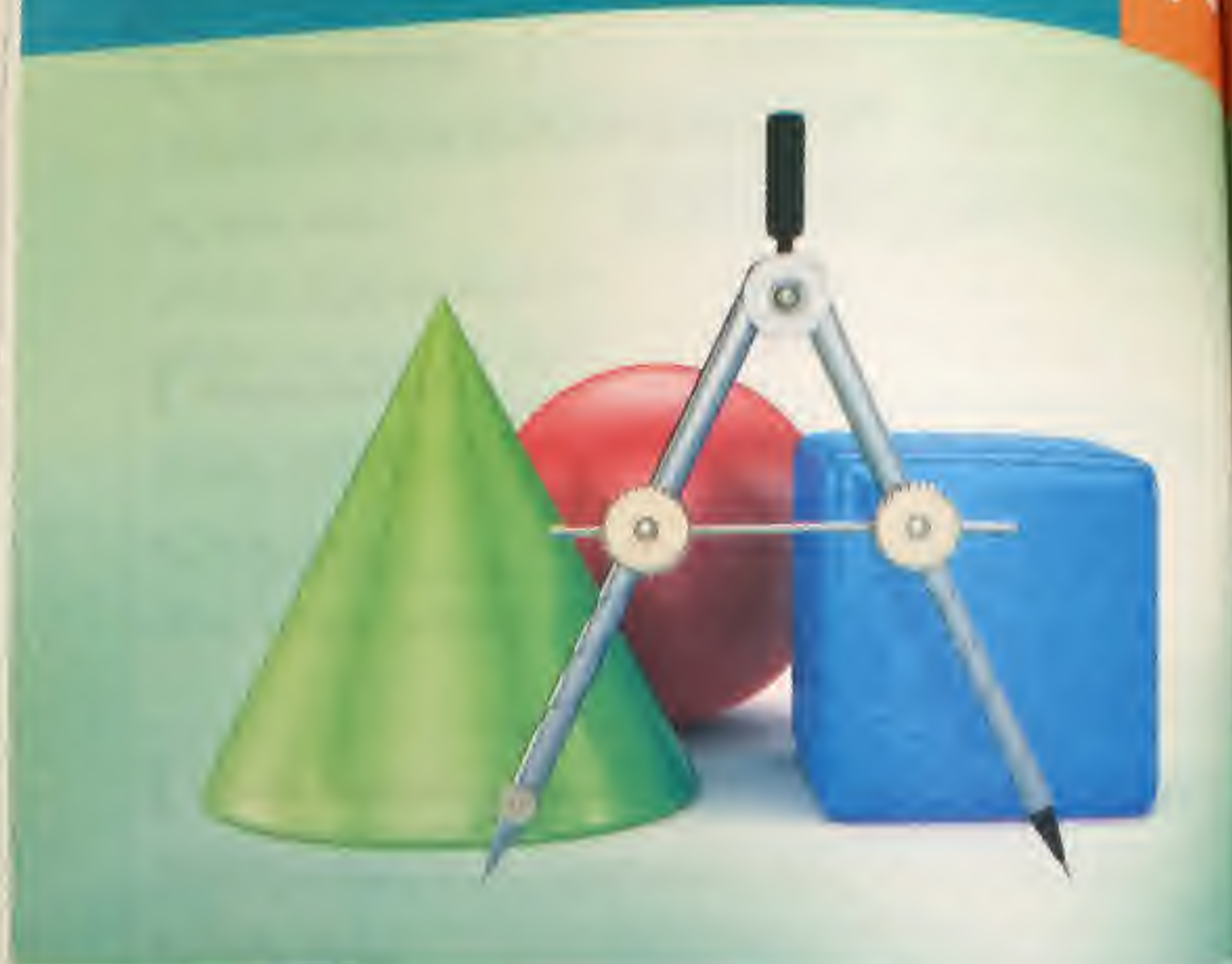


(أ) ٤ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣ سم (د) ٨,٥ سم

١٢ جميع الأعداد التى تقبل القسمة على ٤ ، ١٥ تقبل أيضًا القسمة على ....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٢٤ (د) ٤٥

انيا الهندسة

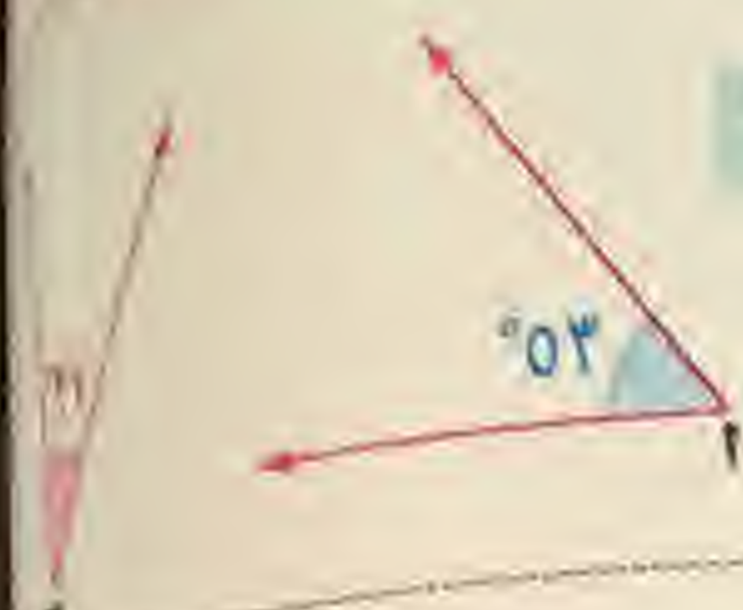


مــراجـعـــــة

١ العلاقات بين الزوايا

الزاويتان المتتامتان :

الزاويتان المتتامتان هما زاويتان مجموع قياسيهما ٩٠°



ففى الشكل المقابل :

∠ أ ، ∠ ب زاويتان متتامتان.

الزاويتان المتكاملتان :

الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسيهما ١٨٠°



ففى الشكل المقابل :

∠ أ ، ∠ ح زاويتان متكاملتان.

الزاويتان المتقابلتان بالرأس :

إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان فى القياس.



ففى الشكل المقابل :

ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

، ق(∠ ٣) = ق(∠ ٤)

الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة :

مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠°

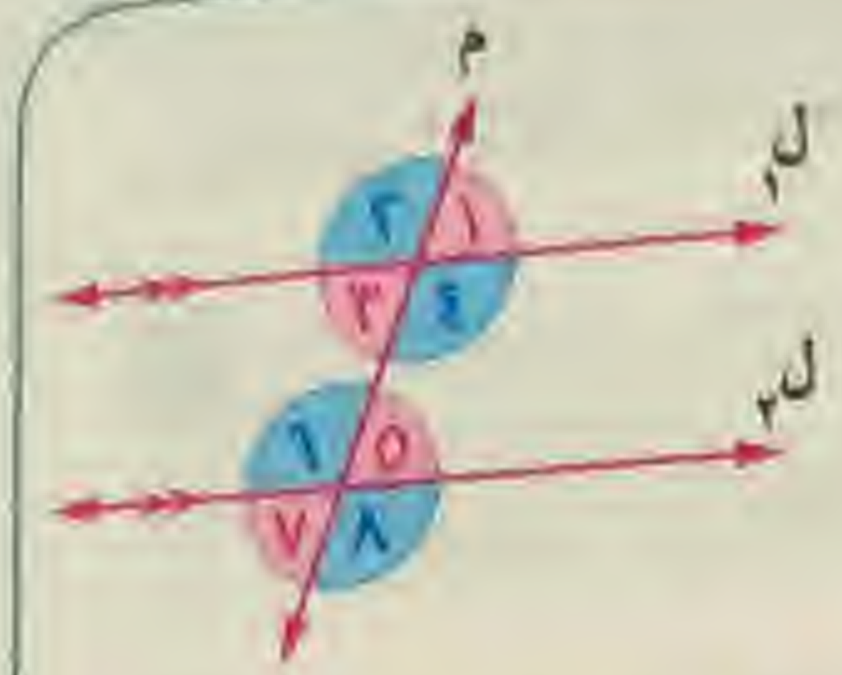


ففى الشكل المقابل :

ق(∠ ١) + ق(∠ ٢) + ق(∠ ٣) + ق(∠ ٤) + ق(∠ ٥) = ٣٦٠°

التوازى

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :



١ كل زاويتين متبادلتين متساويتان فى القياس.

- ق(∠ ٣) = ق(∠ ٥) (بالتبادل)
- ق(∠ ٤) = ق(∠ ٦) (بالتبادل)

٢ كل زاويتين متناظرتين متساويتان فى القياس.

- ق(∠ ١) = ق(∠ ٥) (بالتناظر)
- ق(∠ ٢) = ق(∠ ٦) (بالتناظر)
- ق(∠ ٣) = ق(∠ ٧) (بالتناظر)
- ق(∠ ٤) = ق(∠ ٨) (بالتناظر)

٣ كل زاويتين داخلتين وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان.

- ق(∠ ٣) + ق(∠ ٦) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)
- ق(∠ ٤) + ق(∠ ٥) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)

المثلث

- **مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°**

ق(∠ ١) + ق(∠ ٢) + ق(∠ ٣) = ١٨٠°



ء ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$

- **قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها.**

ق(∠ ٤) = ق(∠ ١) + ق(∠ ٣)

نظرية فيثاغورث :

فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى ضلعى القائمة.



ففى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى أ :

- $(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2$
- $(\text{أ ب})^2 = (\text{ب حـ})^2 - (\text{أ حـ})^2$
- $(\text{أ حـ})^2 = (\text{ب حـ})^2 - (\text{أ ب})^2$

حالات تطابق مثلثين :

* يتطابق المثلثان إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :



١ تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما

فى أحدهما مع نظائرها فى الآخر.



٢ تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما

فى أحدهما مع نظائرها فى الآخر.



٣ تطابق كل ضلع فى أحدهما مع نظيره فى الآخر.



٤ يتطابق المثلثان القائما الزاوية إذا تطابق

الوتر وأحد ضلعى القائمة فى أحدهما مع نظائرها فى الآخر.

• الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى المثلث موازيًا أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

ففى الشكل المقابل :



إذا كانت : ء منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

، $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ حيث هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$

فإن : هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ [أى أن : أهـ = هـب]

• القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طوله.

ففى الشكل المقابل :



إذا كانت : ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$ فإن :

١ $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ **٢** ءهـ = $\frac{1}{2}$ بحـ

المضلع

- مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = (ن − ٢) × ١٨٠°

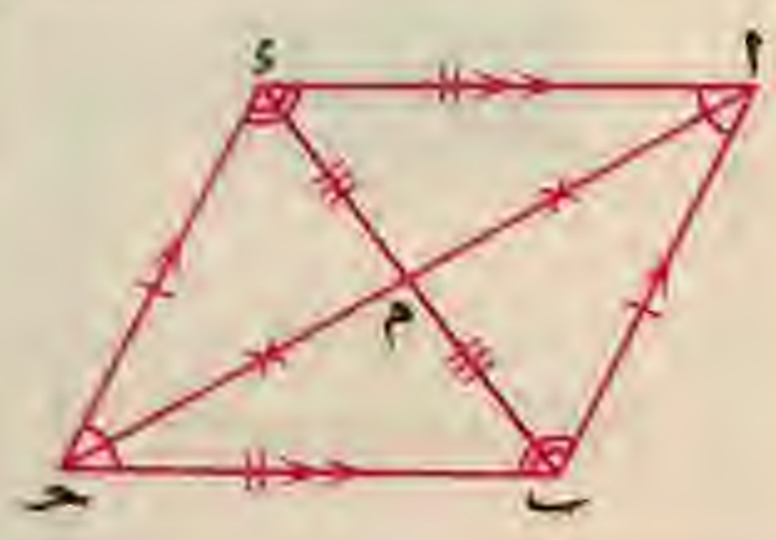
مثلًا: مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الخماسى = (٥ − ٢) × ١٨٠° = ٥٤٠°

- قياس كل زاوية داخلة من زوايا مضلع منتظم عدد أضلاعه ن = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$

مثلًا: قياس الزاوية الداخلة للسداسى المنتظم = $\frac{(٦ - ٢) \times ١٨٠°}{٦}$ = ١٢٠°

متوازى الأضلاع وحالاته الخاصة

خواص متوازى الأضلاع :



إذا كان أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$ فى نقطة م فإن :

١ مجموع قياسى أى زاويتين متتاليتين فى متوازى الأضلاع = ١٨٠°

أى أن : • ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٨٠° • ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

• ق (∠ جـ) + ق (∠ ء) = ١٨٠° • ق (∠ ء) + ق (∠ أ) = ١٨٠°

٢ كل زاويتين متقابلتين فى متوازى الأضلاع متساويتان فى القياس.

أى أن : • ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) • ق (∠ ب) = ق (∠ ء)

٣ كل ضلعين متقابلين فى متوازى الأضلاع متساويان فى الطول ومتوازيان.

أى أن : • أ ب = ء جـ ، $\overline{أب}$ // $\overline{ءجـ}$ • أ ء = ب جـ ، $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$

٤ قطرا متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

أى أن : • أ م = جـ م • ب م = ء م

- محيط متوازى الأضلاع = مجموع طولى أى ضلعين متجاورين فيه × ٢

يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا تحققت إحدى الحالات الآتية

إذا توازى فيه كل ضلعين متقابلين.	إذا تساوى فيه طولا كل ضلعين متقابلين.	إذا توازى ضلعان متقابلان فيه وتساويا فى الطول	إذا نصف القطران كل منهما الآخر.	إذا تساوى فيه قياسا كل زاويتين متقابلتين
				

يكون متوازى الأضلاع

مستطيل
إذا كان :
إحدى زواياه قائمة
أو
القطران متساويان فى الطول

معين
إذا كان :
ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول
أو
القطران متعامدان

مربع
إذا كان :
إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متساويان فى الطول
أو
إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان
أو
القطران متساويان فى الطول ومتعامدان
أو
ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول وقطراه متساويان فى الطول

لاحظ أن :

* **المربع هو** : مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول.
أو مستطيل قطراه متعامدان.

* **المربع هو** : معين إحدى زواياه قائمة.
أو معين قطراه متساويان فى الطول.

• لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل أو معين أو مربع نثبت أولاً أن هذا الشكل متوازى أضلاع



تمرينات المراجعة

أسئلة كتاب الوزارة

أكمل ما يأتى مستعينًا بمعطيات كل شكل :

١



• ب جـ = ... سم • جـ د = ... سم

• ق(∠أ) = ...° • ق(∠د) = ...°

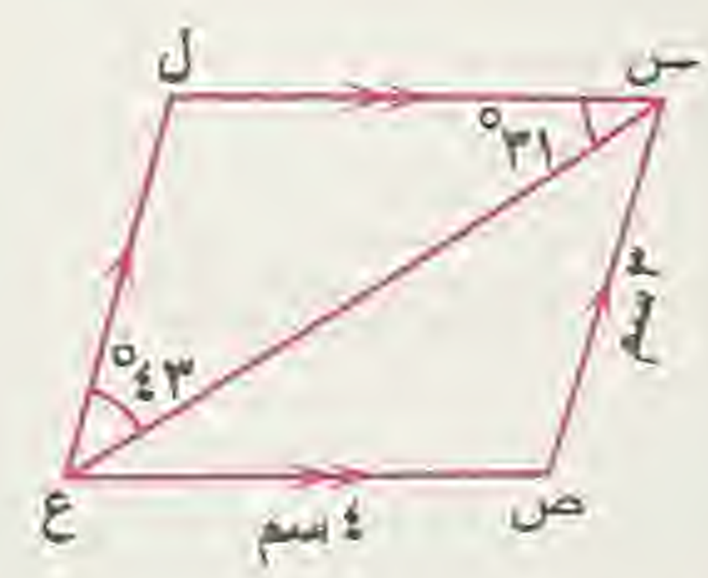
٢ أ جـ = ٨ سم ، ب م = ٧ سم



• أ م = ... سم

• ب د = ... سم

٣



• ق(∠ص) = ...°

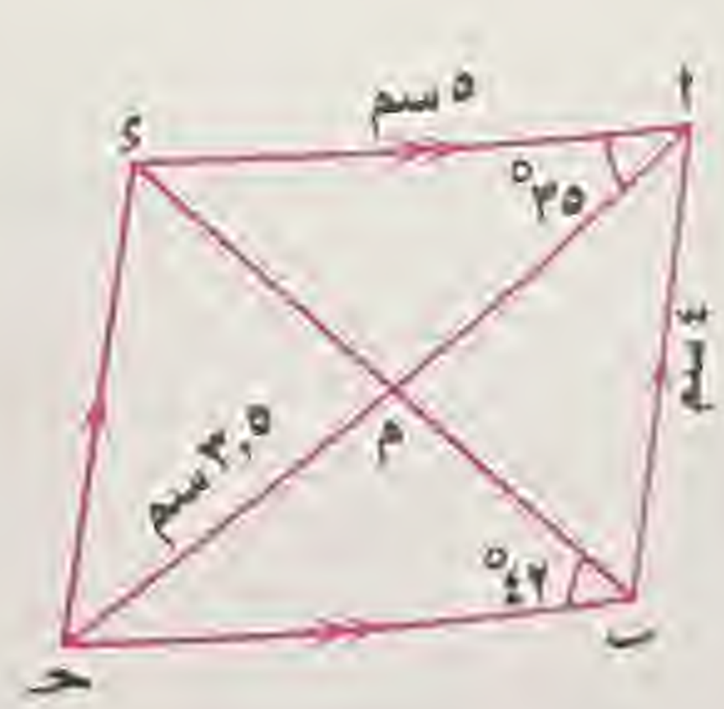
• محيط ▱ س ص ع ل = ... سم

٤



• محيط △ أ ب م = ... سم

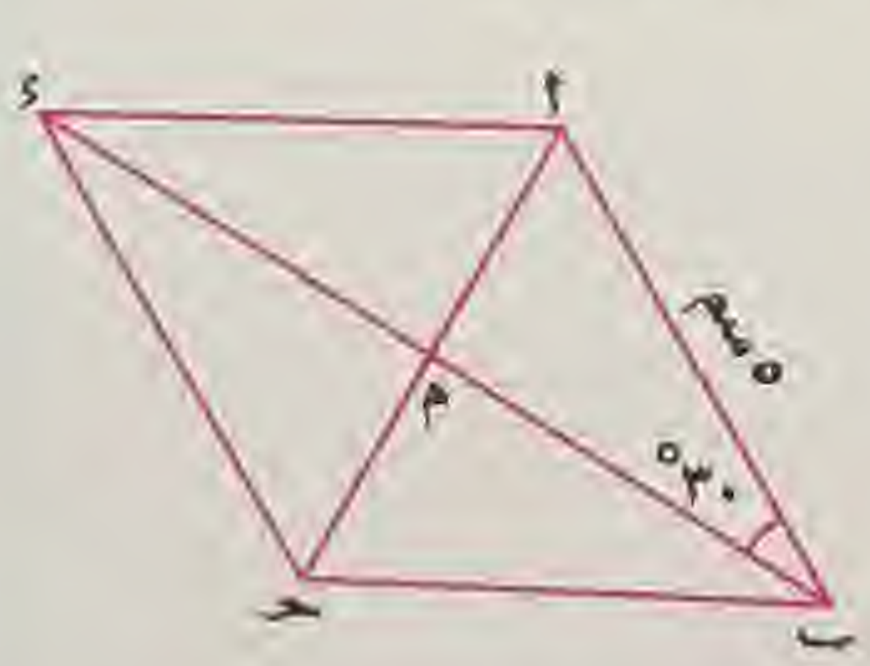
٥



• محيط △ أ ب جـ = ... سم

• ق(∠أ م ب) = ...°

٦ أ ب جـ د معين



• أ د = ... سم

• ق(∠ب أ م) = ...°

٧ أ ب حـ ء مستطيل ، أ حـ = ٦ سم



• أ ب = ... سم

• ء م = ... سم

• محيط Δ أ ب م = ... سم

٨ أ ب حـ ء مربع ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$



• محيط المربع أ ب حـ ء = ... سم

• ق (∠ أ حـ هـ) = ...°

• ق (∠ أ و حـ) = ...°

٢ أوجد قيم س ، ص ، ع لكل من متوازيات الأضلاع التالية :

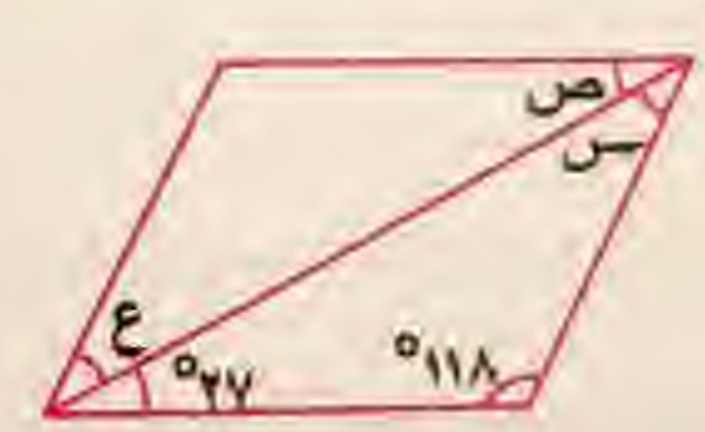
١



٢



٣



٤



٥



٦

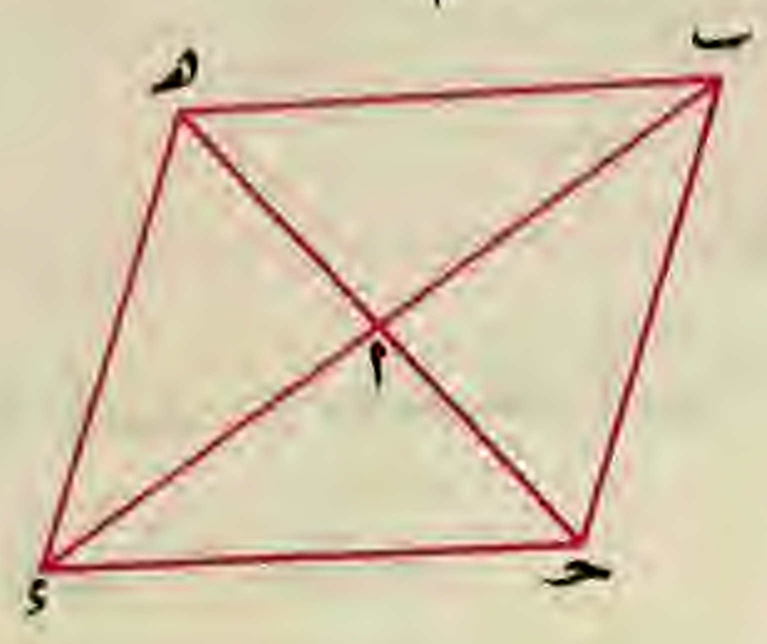


أوجد طول $\overline{أب}$ فى كل من متوازيات الأضلاع التالية :

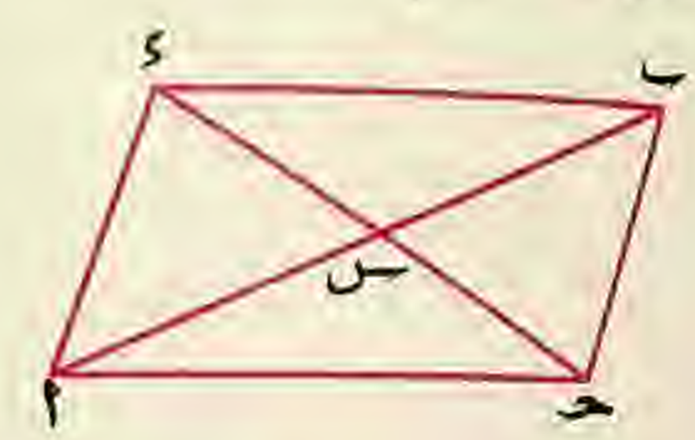
(١)



(٢) ب ء = ١٥ سم



(٣) أ س = ٧ سم



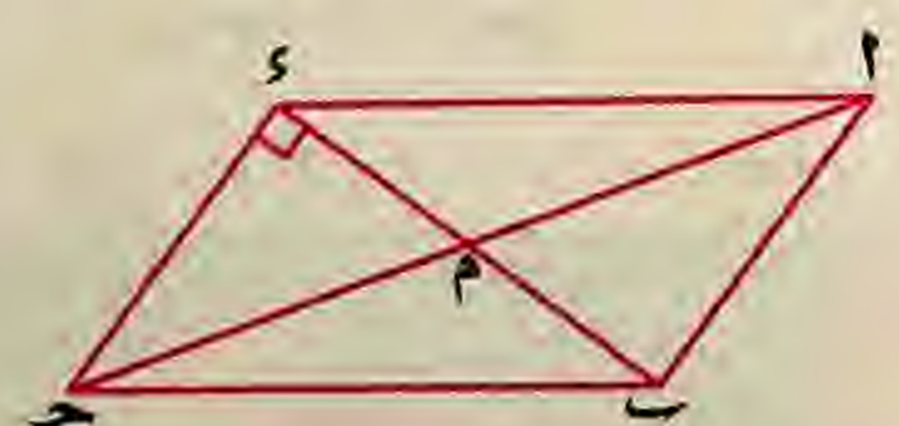
(٤) أ ب = $\frac{١}{٣}$ أ ء



(٥) ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب



(٦) ب حـ = ١٥ سم ، ب م = ٦ سم



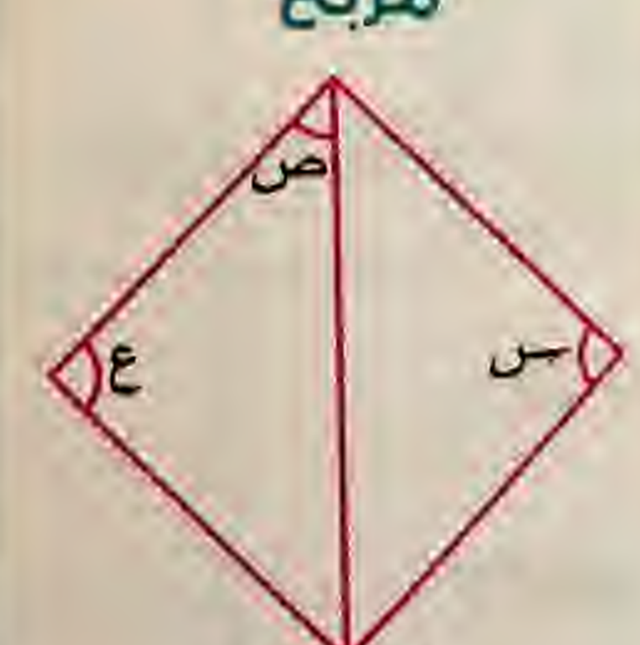
أوجد قيم س ، ص ، ع فى كل من الأشكال الآتية :

مستطيل



شكل (١)

مربع



شكل (٢)

معين



شكل (٣)

مستطيل



شكل (٤)

٥ أكمل ما يأتي :

١



إذا كانت : ء منتصف $\overline{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : ...... منتصف ......

٢



إذا كانت : ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

فإن : ...... // ......

٣



إذا كانت : ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

، بحـ = ٦ سم

فإن : ءهـ = ... سم

٤



إذا كان : ق(∠ب) = ٩٠°

، ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

فإن : ق(∠أءهـ) = ...°

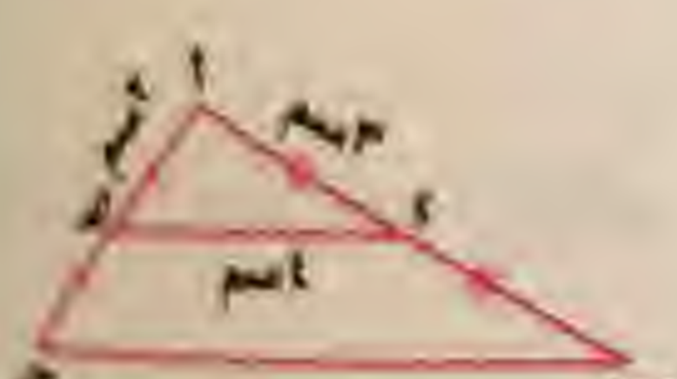
٥



إذا كانت : ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب وكان محيط Δ أبحـ = ٢٤ سم

فإن : محيط Δ أءهـ = ... سم

٦



إذا كانت : ء ، هـ منتصفي $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب

، أء = ٣ سم ، أهـ = ٢ سم

، ءهـ = ٤ سم

فإن : محيط الشكل ءبحـهـ = ... سم



... محيط المربع

... = ٢٠ سم

... // حـ ب

... = ... سم

٨



إذا كان : أ ب حـ ء معيناً محيطه ٢٤ سم

، هـ منتصف $\overline{أب}$

فإن : م هـ = ... سم

٩



إذا كان : أ ب حـ ء مربعاً ،

س ، ص منتصفي $\overline{أم}$ ، $\overline{أب}$ على الترتيب

، أ حـ = ١٢ سم

فإن : س ص = ... سم

، ق (∠ أ ص س) = ... °

الوحدة

4

متوسطات المثلث - المثلث المتساوى الساقين



دروس الوحدة :

مشروع بحثى على الوحدة الرابعة

... الوحدة :

... هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- ... متوسط المثلث.
- ... نقطة تقاطع متوسطات المثلث والنسبة التى تقسم ... كل متوسط
- ... العلاقة بين طول المتوسط الخارج من رأس القائمة ... المثلث القائم الزاوية وطول الوتر.
- ... المثلث الثلاثيني ستيني
- ... خواص المثلث المتساوى الساقين.
- ... خواص المثلث المتساوى الأضلاع.
- ... محور تماثل القطعة المستقيمة.
- ... محور تماثل المثلث المتساوى الساقين.
- ... مسائل متنوعة على المثلث المتساوى الأضلاع والمثلث المتساوى الساقين.
- ... دور الهندسة فى حل المشكلات الحياتية.

السـاقين





الدرس 1

متوسطات المثلث

تعريف

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس من رءوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

فإن : $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب جـ



* لاحظ أن : أى مثلث له ثلاثة متوسطات.

نظرية ١

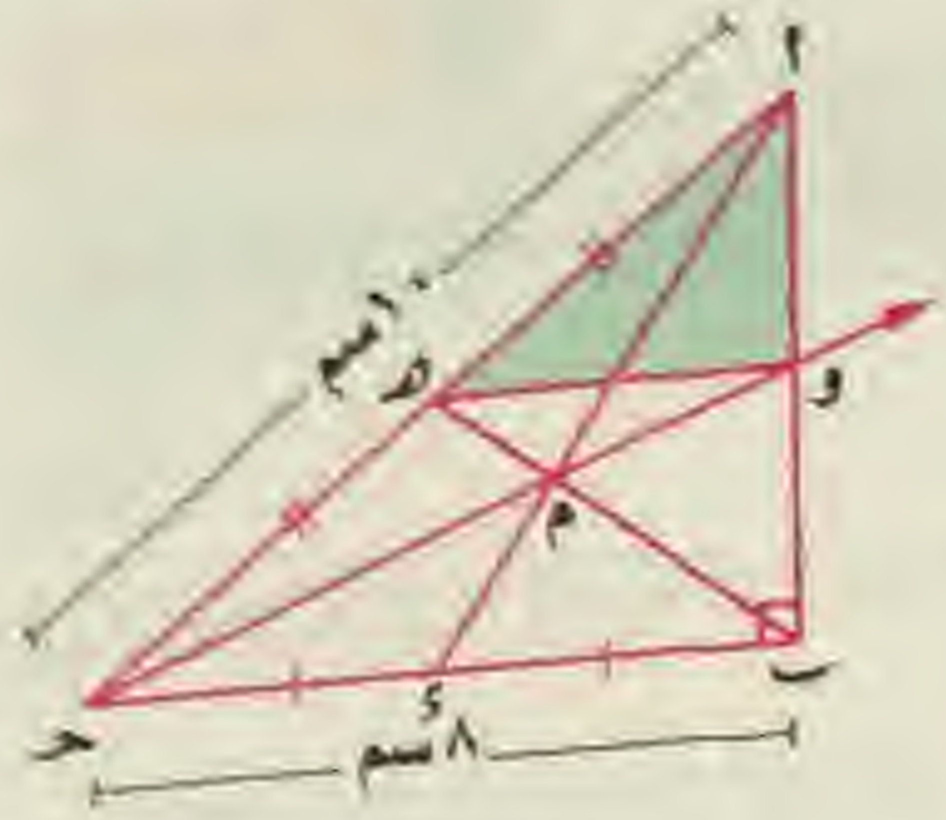
متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب و}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ هى المتوسطات الثلاثة للمثلث أ ب جـ

، وتتقاطع جميعها فى نقطة م ($\overline{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب و}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{م}\}$)





...الشكل المقابل :

...حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه :

...حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٨ سم

... ، هـ منتصفا $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

... $\overline{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{م}\}$ ، رُسم $\overleftarrow{\text{حـ م}}$ ليقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى و أوجد : محيط Δ أ و هـ

...ـل

...معطيات ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٨ سم

، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

...مطلوب إيجاد : محيط Δ أ و هـ

...برهان فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ $(\text{أ ب})^2 = (\text{أ حـ})^2 - (\text{ب حـ})^2$ = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦ ∴ أ ب = ٦ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ∵ $\overline{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{م}\}$ ∴ م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ

، ∵ م ∈ $\overline{\text{حـ و}}$ ∴ $\overline{\text{حـ و}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ و = $\frac{1}{2}$ أ ب = ٣ سم

، ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ∴ أ هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٥ سم

، فى Δ أ ب حـ : ∵ و ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ٤ سم

∴ محيط Δ أ و هـ = أ و + و هـ + أ هـ = ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ سم (وهو المطلوب)

نظرية ٢

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة.

فمثلًا :

فى الشكل التالى : إذا كان ٩ ب حـ مثلث ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن :

① م ء = $\frac{1}{2}$ ٩ م

فإذا كان : ٩ م = ٦ سم

فإن : م ء = ٣ سم



② م حـ = ٢ و م

فإذا كان : و م = ٤ سم

فإن : م حـ = ٨ سم

ملاحظات

* **نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.**
* فى الشكل المقابل :

إذا كان ٩ ب حـ مثلث

، م نقطة تلاقى متوسطاته $\overline{٩ء}$ ، $\overline{بو}$ ، $\overline{حـهـ}$

فإن : م ء = $\frac{1}{3}$ ٩ء ، ٩ م = $\frac{2}{3}$ ٩ء



فمثلًا :

إذا كان : ٩ء = ٩ سم فإن : م ء = $\frac{1}{3}$ ٩ء = ٣ سم ، ٩ م = $\frac{2}{3}$ ٩ء = ٦ سم

وبالمثل : م و = $\frac{1}{3}$ ب و ، ب م = $\frac{2}{3}$ ب و

، م هـ = $\frac{1}{3}$ حـ هـ ، حـ م = $\frac{2}{3}$ حـ هـ

مثال ٢

فى الشكل المقابل :

٩ ب حـ مثلث فيه :

$\overline{حـء}$ ، $\overline{بهـ}$ متوسطان تقاطعا فى نقطة م

، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، ء حـ = ١٢ سم

أوجد : محيط Δ ء م هـ



المعطيات

أ ب حـ مثلث فيه : $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان ، م نقطة تقاطعهما

، ب م = ٦ سم ، ب حـ = ١٣ سم ، ء حـ = ١٢ سم

المطلوب

إيجاد : محيط △ ء م هـ

البرهان

∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان تقاطعا فى نقطة م

∴ م نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب حـ

∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

، ء م = $\frac{١}{٣}$ ء حـ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

، ∵ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسطان فى △ أ ب حـ

∴ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ = ٦,٥ سم

∴ محيط △ ء م هـ = م هـ + ء م + ء هـ = ٣ + ٤ + ٦,٥ = ١٣,٥ سم (وهو المطلوب)

حقيقة

النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى نقطة تقاطع متوسطات هذا المثلث.

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overline{\text{أ ء}}$ متوسط فى △ أ ب حـ

، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ وكان : أ م = ٢ م ء

فإن : م تكون نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب حـ

أ م = ٢ م ء



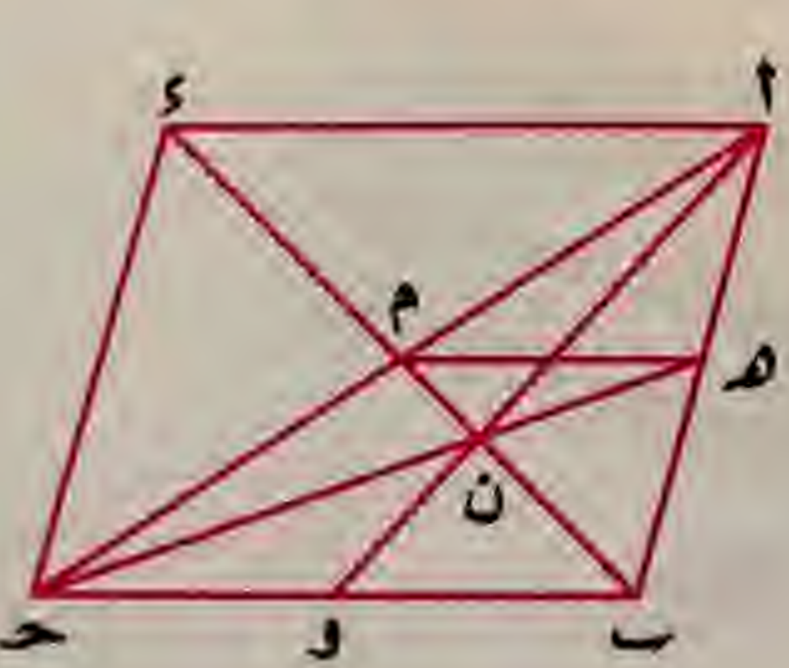
مثال ٣

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

فإذا كانت ن ∈ $\overline{\text{ب م}}$ بحيث ب ن = ٢ ن م

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ن}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {هـ} فأثبت أن : هـ م = $\frac{١}{٢}$ ب حـ



الحل

المعطيات أ ب جـ د متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، ب ن = ٢ ن م

المطلوب إثبات أن : هـ م = $\frac{1}{2}$ ب جـ

البرهان ∵ أ ب جـ د متوازى أضلاع. ∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ م منتصف أ جـ ∴ ب م متوسط فى Δ أ ب جـ

، ∵ ن ∈ ب م بحيث ب ن = ٢ ن م

∴ ن نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ

، ∵ جـ هـ تمر بنقطة ن ∴ جـ هـ متوسط فى Δ أ ب جـ

∴ فى Δ أ ب جـ :

∵ هـ منتصف أ ب ، م منتصف أ جـ

∴ هـ م = $\frac{1}{2}$ ب جـ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، م نقطة تقاطع متوسطاته

فإذا كان : م د = ٣ سم ، ب م = ٤ سم ، ب جـ = ٩ سم

فأكمل ما يأتى :



١ ب و = ... سم

٢ م جـ = ... سم

٣ م هـ = ... سم

فى نهاية كل درس ستجد الإجابات النهائية لأسئلة حاول بنفسك بنفس هذا الشكل

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ فى Δ ا ب حـ إذا كانت : ء منتصف ب‾حـ فإن ا‾ء يسمى ....

٢ عدد متوسطات المثلث هو ....

٣ متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى ....

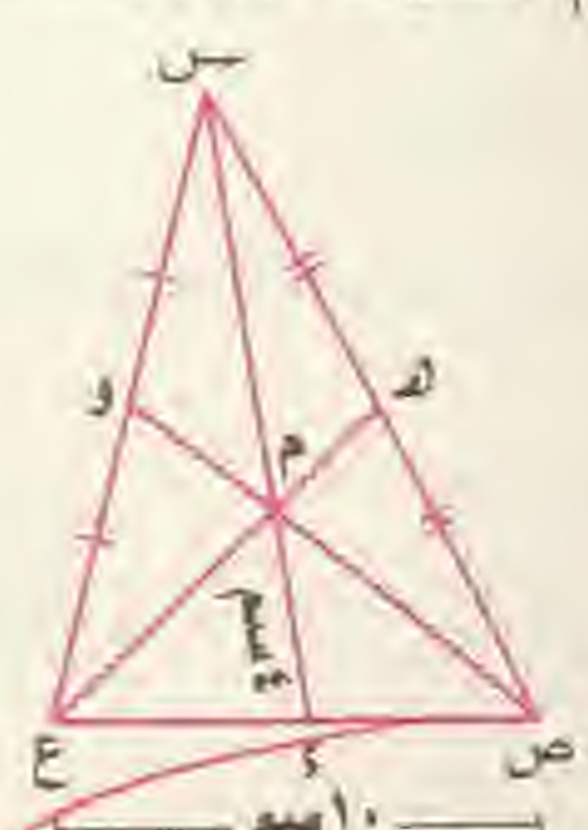
٤ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة.

٥ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة .... : .... من جهة الرأس.

٦ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٢ : .... من جهة القاعدة.

٢ باستخدام المعطيات الموجودة على كل شكل أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل :

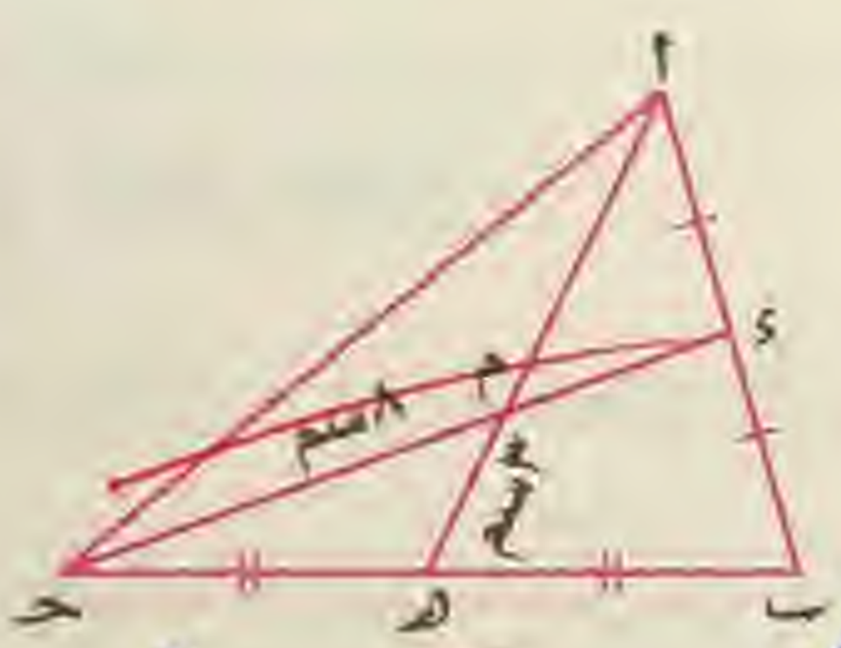
١



س م = ... سم

، ص ء = ... سم

٢



م ا = ... سم ، م ء = ... سم

، م هـ = ... ا هـ ، م حـ = ... حـ ء

٣



إذا كان: ب حـ = ١٢ سم

، ا هـ = ٩ سم ، م حـ = ٨ سم

فإن: ء هـ = ... سم

، م هـ = ... سم

، م ء = ... سم

٤



إذا كان : ل ع = ١٥ سم ، ص م = ١٨ سم

، س ص = ٢٠ سم

فإن : ن ل = ... سم

، ن ص = ... سم

، محيط Δ ن ل ص = ... سم

٣ في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ

، هـ منتصف ا حـ ، ا ء ∩ ب هـ = {م}

فإذا كان : ا ء = ٦ سم ، ا ب = ب هـ = ٩ سم

فاحسب : محيط Δ م ء هـ



٤ في الشكل المقابل :

إذا كانت : ء ، هـ منتصفي ا ب ، ا حـ على الترتيب

، ب هـ ∩ ء حـ = {م}

، ء هـ = ٤ سم ، ء م = ٣ سم ، ب هـ = ٦ سم

أوجد : محيط Δ ب م حـ



٥ في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث ، س منتصف ا ب ، ص منتصف ب حـ

، س ص = ٥ سم ، س حـ ∩ ا ص = {م}

حيث حـ م = ٨ سم ، ص م = ٣ سم

أوجد : (١) محيط Δ م س ص (٢) محيط Δ م ا حـ



٦ ا ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ٨ سم ، و ، هـ منتصفا ا ب ، ا حـ على الترتيب

، ب هـ ∩ حـ و = {م} ، فإذا كان : ب م = ٤ سم ، حـ م = ٦ سم

أوجد : محيط Δ م و هـ

٧ ا ب حـ مثلث فيه : و ، هـ منتصفا ا ب ، ا حـ على الترتيب ، ب هـ ∩ حـ و = {م}

، رسم ا م بحيث ا م ∩ ب حـ = {ء} فإذا كان : ب حـ = ١٠ سم ، ا ء = ١٢ سم

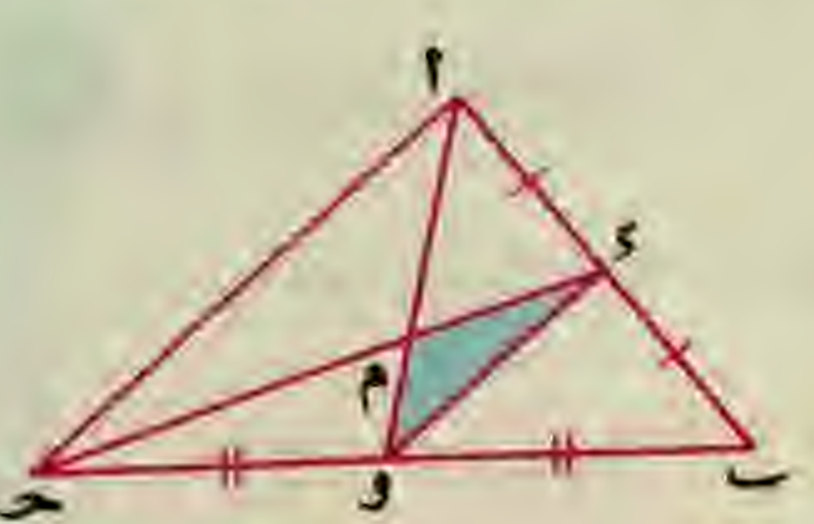
أوجد : طول كل من ب ء ، ا م

في الشكل المقابل :

أو ، حـ ء متوسطان في Δ أ ب حـ ، أو ∩ حـ ء = {م}

فإذا كان محيط Δ أ م حـ = ٣٦ سم

فأوجد : محيط Δ م و ء



«١٨ سم»

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : هـ منتصف ب حـ

، و منتصف أ حـ ، أ هـ ∩ ب و = {م}

إذا كان : أ م + ب م + حـ م = ١٨ سم

أوجد : أ هـ + ب و + حـ ء



«٢٧ سم»

في الشكل المقابل :

م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

، أ م ⊥ حـ ء

، م حـ = ٦ سم ، أ ء = ٥ سم

أوجد : طول م هـ



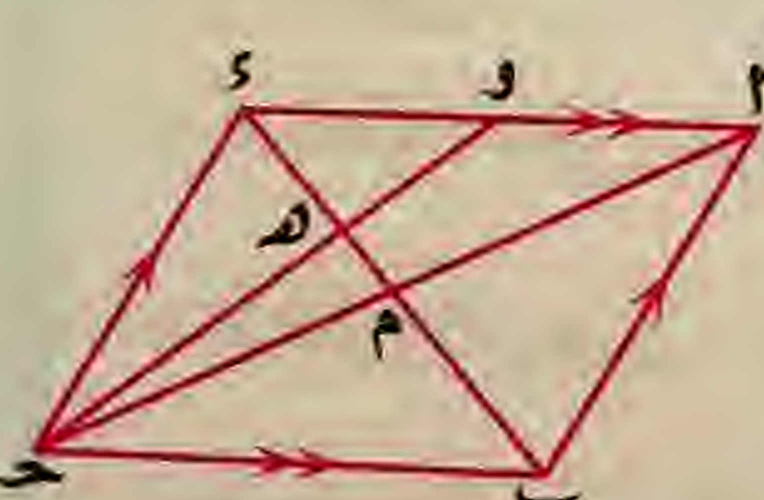
«٢ سم»

في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م

، هـ ∈ ء م حيث ء هـ = ٢ هـ م ، رسم حـ هـ فقطع أ ء فى و

أثبت أن : أ و = و ء



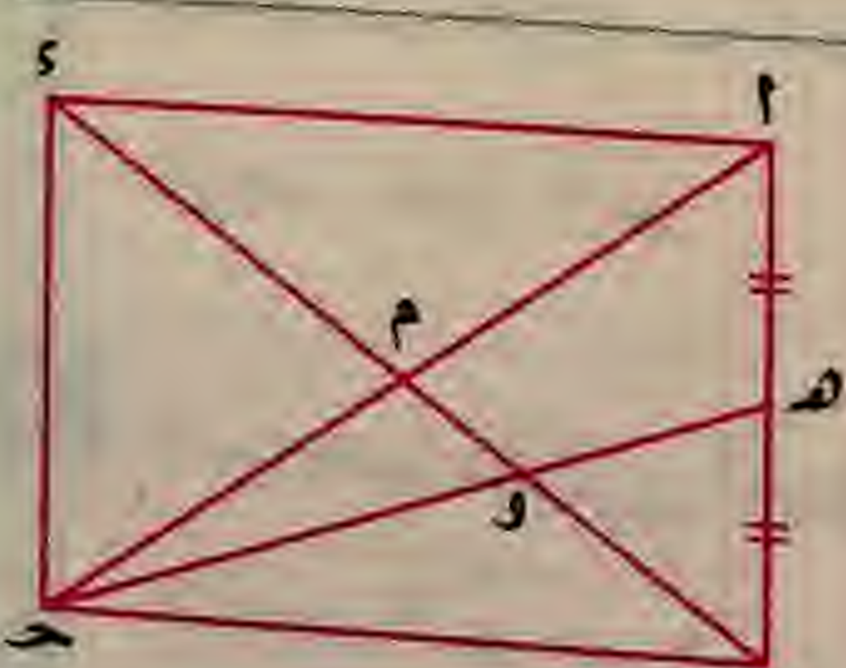
في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م

، هـ منتصف أ ب ، حـ هـ ∩ ب ء = {و}

(١) أثبت أن : و نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

(٢) إذا كان : ب و = ٤ سم أوجد : طول أ م



«٦ سم»

١٣ في الشكل المقابل :



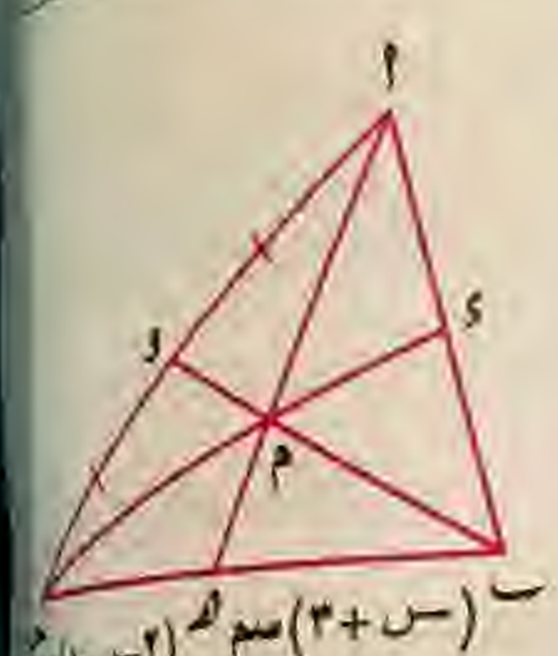
أ ب جـ مثلث فيه : ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = أ جـ

، م ∈ $\overline{أ ء}$ بحيث أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ ء ، $\overrightarrow{جـ م}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = {و}

أثبت أن : ب و = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

١٤ أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ، م ∈ $\overline{أ ء}$ بحيث أ م = ٢ م ء ، رسم $\overrightarrow{جـ م}$ فقطع $\overline{أ ب}$ فى هـ فإذا كان هـ جـ = ١٢ سم **أوجد :** طول $\overline{هـ م}$

١٥ في الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه : و منتصف $\overline{أ جـ}$ ، ب و = ٣ م و

، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث : ب هـ = (س + ٣) سم

، هـ جـ = (٢ س − ١) سم ، ء ∈ $\overline{أ ب}$

، $\overline{ب و}$ ∩ $\overline{جـ ء}$ ∩ $\overline{أ هـ}$ = {م}

أوجد : طول $\overline{ب جـ}$

١٦ في الشكل المقابل :



م ∈ $\overline{جـ ء}$

، م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب جـ

، ن ∈ $\overline{ء م}$ بحيث : ن ء = (س − ١) سم

، م ن = (س + ٣) سم

رسم $\overrightarrow{أ ن}$ فقطع $\overline{ب م}$ فى هـ منتصف $\overline{ب م}$

أوجد : طول $\overline{م جـ}$

١٧ أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ، رسمت $\overline{ء هـ}$ فقطعت $\overline{أ جـ}$ فى و

أثبت أن : ١ $\overrightarrow{ب و}$ ينصف $\overline{جـ ء}$ ٢ جـ و = $\frac{١}{٣}$ أ جـ

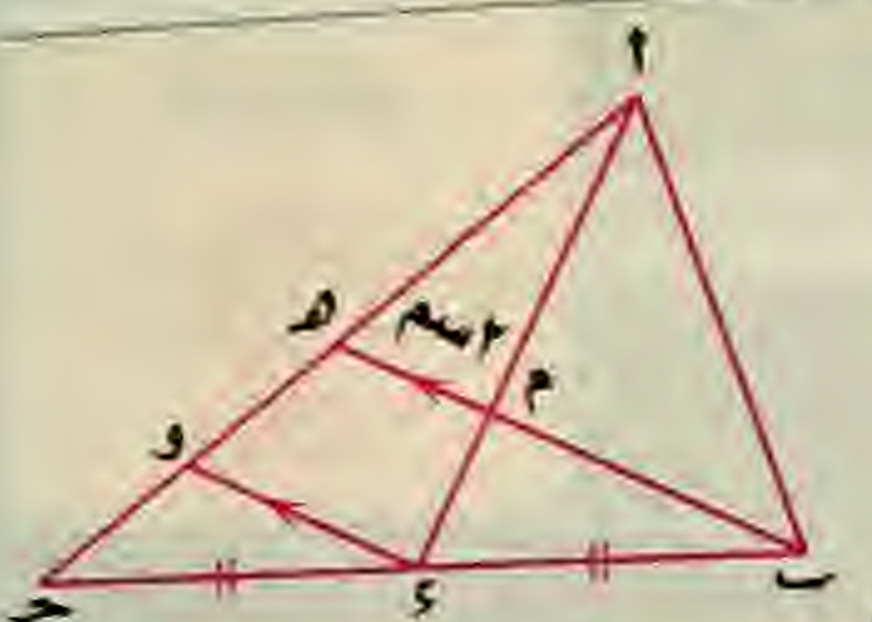


فى الشكل المقابل :

اء ، ب هـ متوسطان فى المثلث ا ب حـ متقاطعان فى نقطة م

، حـ م ∩ ا ب = {و} فإذا كانت ن منتصف م ب

فأثبت أن : الشكل و ن ء م متوازى أضلاع.



فى الشكل المقابل :

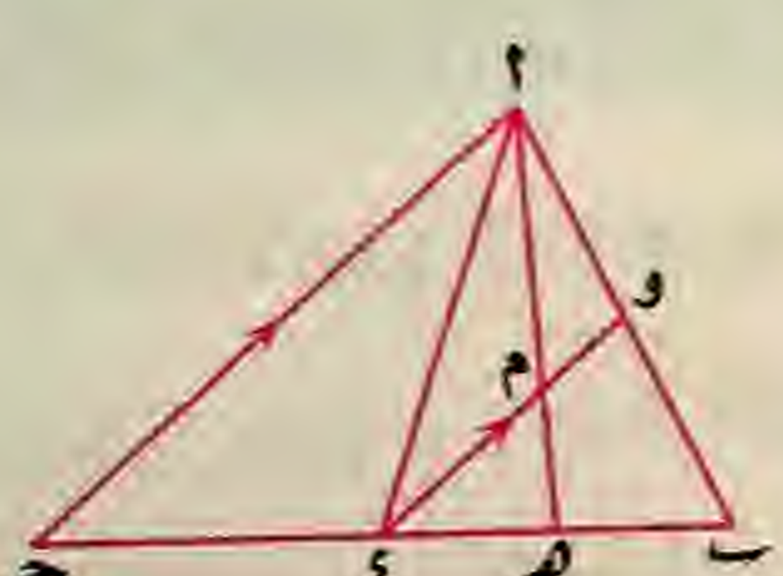
ا ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ ، م ∈ ا ء

بحيث ا م = ٢ م ء ، ب م ∩ ا حـ = {هـ}

، م هـ = ٢ سم فإذا رسم ء و // ب هـ ويقطع ا حـ فى و

فأوجد : طول ء و

«٣٠ سم»



فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ب حـ ، هـ منتصف ب ء

، رسم ء و // ا حـ ويقطع ا هـ فى م ، ا ب فى و

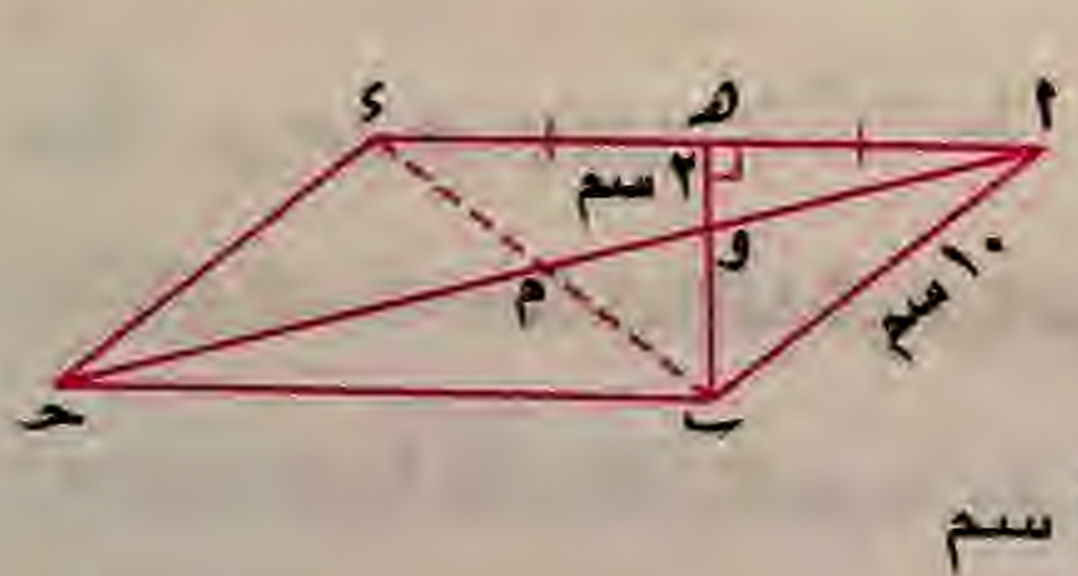
أثبت أن : ء م = $\frac{1}{4}$ ا حـ

ا ب حـ مثلث فيه : ء منتصف ا ب ، هـ منتصف ا حـ فإذا كان حـ ء ∩ ب هـ = {م}

، ورسم ا م فقطع ب حـ فى و

أثبت أن : الشكل ء ب و هـ متوازى أضلاع.

للمتفوقين



فى الشكل المقابل :

ا ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ منتصف ا ء

بحيث ب هـ ⊥ ا ء

ا حـ ∩ ب هـ = {و} ، هـ و = ٢ سم ، ا ب = ١٠ سم

أوجد : مساحة متوازى الأضلاع ا ب حـ ء

«٩٦٠ سم^2»



الدرس **2**

تابع متوسطات المثلث

نظرية ٣

طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.



المعطيات أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط فى المثلث أ ب حـ

المطلوب إثبات أن : ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ

العمل نرسم $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ، بحيث ب ء = ء هـ

البرهان الشكل أ ب حـ هـ فيه : $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ينصف كل منهما الآخر.

∴ الشكل أ ب حـ هـ متوازى أضلاع.

، ∵ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ الشكل أ ب حـ هـ مستطيل. ∴ ب هـ = أ حـ

، ∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ (وهو المطلوب)

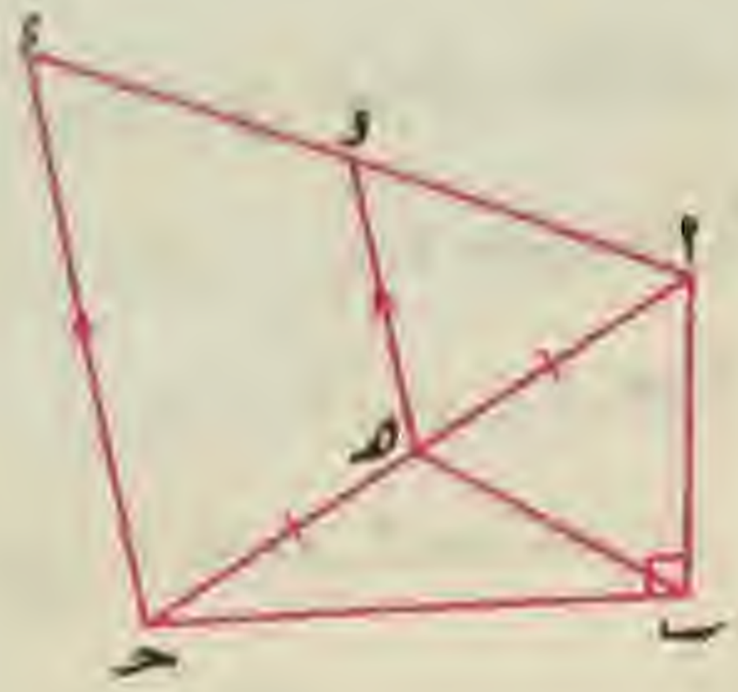
فمثلًا : فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ وكان أ حـ = ١٠ سم

فإن : ء ب = ٥ سم





في الشكل المقابل :

اب حء شكل رباعى فيه : ق(∠ اب ح) = ٩٠° ، اح = حء

هـ منتصف $\overline{اح}$ ، و ∈ $\overline{اء}$ بحيث $\overline{هـو}$ // $\overline{حء}$

أثبت أن : ب هـ = هـ و

الحل

المعطيات	ق(∠ اب ح) = ٩٠° ، اح = حء ، هـ منتصف $\overline{اح}$ ، $\overline{هـو}$ // $\overline{حء}$
المطلوب	إثبات أن : ب هـ = هـ و
البرهان	فى Δ اب ح :

∵ ق(∠ اب ح) = ٩٠° ، $\overline{ب هـ}$ متوسط ∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ اح

، ∵ اح = حء ∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ حء (١)

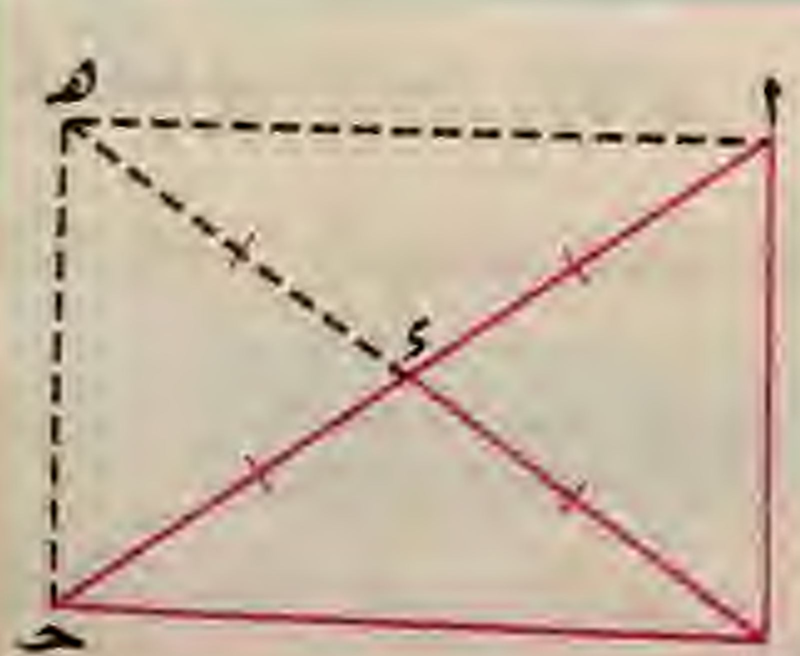
فى Δ اح ء : ∵ هـ منتصف $\overline{اح}$ ، $\overline{هـو}$ // $\overline{حء}$

∴ و منتصف $\overline{اء}$ ∴ هـ و = $\frac{1}{2}$ حء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب هـ = هـ و (وهو المطلوب)

عكس نظرية ٣

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.



المعطيات	اب ح مثلث ، $\overline{ب ء}$ متوسط فيه ، ء ا = ء ب = ء ح
المطلوب	إثبات أن : ق(∠ اب ح) = ٩٠°
العمل	نرسم $\overrightarrow{ب ء}$ ونأخذ نقطة هـ ∈ $\overrightarrow{ب ء}$ ، بحيث ب ء = ء هـ
البرهان	∵ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ اح ∴ ب هـ = اح

∴ الشكل اب ح هـ فيه : $\overline{اح}$ ، $\overline{ب هـ}$ متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر.

∴ الشكل اب ح هـ مستطيل ∴ ق(∠ اب ح) = ٩٠° (وهو المطلوب)



فمثلاً : فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{بء}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

، ب ء = ٣ سم ، أ حـ = ٦ سم

فإن : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° (لأن : ب ء = $\frac{1}{2}$ أ حـ)

مثال ❷



فى الشكل المقابل :

أ ء ب مثلث قائم الزاوية فى ء ، هـ منتصف $\overline{أب}$

، حـ هـ = ء هـ أثبت أن : ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°

الحل

المعطيات	هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٩٠° ، حـ هـ = ء هـ
المطلوب	إثبات أن : ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°
البرهان	فى Δ أ ء ب : ∵ ق (∠ أ ء ب) = ٩٠° ، $\overline{ءهـ}$ متوسط ∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب ولكن حـ هـ = ء هـ ∴ حـ هـ = $\frac{1}{2}$ أ ب ∴ فى Δ أ حـ ب : $\overline{حـهـ}$ متوسط طوله يساوى نصف طول $\overline{أب}$ ∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠° (وهو المطلوب)

نتيجة

طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



أى أنه فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

فإن : أ ب = $\frac{1}{2}$ أ حـ

فمثلاً : إذا كان : أ حـ = ٢٠ سم فإن : أ ب = ١٠ سم

ملاحظة

المثلث القائم الزاوية الذى قياس إحدى زواياه ٣٠° يكون قياس الزاوية الثالثة ٦٠°
ولذلك يُسمى مثلث ثلاثينى ستينى.



في الشكل المقابل :
أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠°
أ حـ = ١٦ سم ، ل منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$
أوجد : ١ طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ل}}$ ٢ محيط Δ أ ب ل

المعطيات ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، أ حـ = ١٦ سم ، ل منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

المطلوب إيجاد : ١ أ ب ، ب ل ٢ محيط Δ أ ب ل

البرهان ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٨ سم

، ∵ $\overline{\text{ب ل}}$ متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ ب ل = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٨ سم (المطلوب أولًا)

، ∵ أ ل = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ٨ سم

∴ محيط Δ أ ب ل = ٨ + ٨ + ٨ = ٢٤ سم (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك



في الشكل المقابل :
ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء ب هـ) = ٩٠°
ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ هـ) = ٣٠°
أثبت أن : أ حـ = ء هـ

(س ٤ ÷ $\frac{٨}{١}$ = ٤ س ، ص ÷ $\frac{٨}{١}$ = ٤ س : ...)

تمارين 2

على متوسط المثلث القائم الزاوية
- المثلث الثلاثينى ستينى

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية هو ....

٢ طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى ....

٣ إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون ....

٤ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها 30° فى المثلث القائم الزاوية يساوى ....

٥ طول الوتر فى المثلث الثلاثينى ستينى يساوى .... طول الضلع المقابل للزاوية ...

٢ باستخدام المعطيات الموجودة على كل شكل أوجد ما هو مطلوب أسفل كل شكل :

١



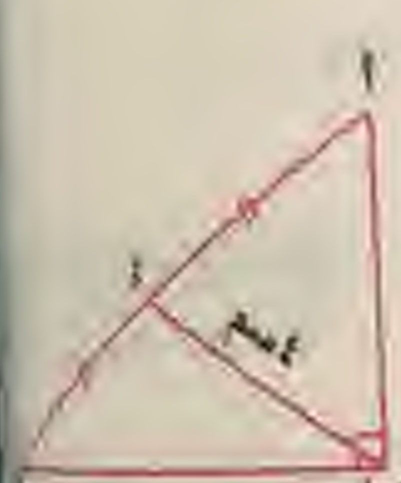
أ حـ = ... سم

٢



س ع = ... سم

٣



أ حـ = ...

٤



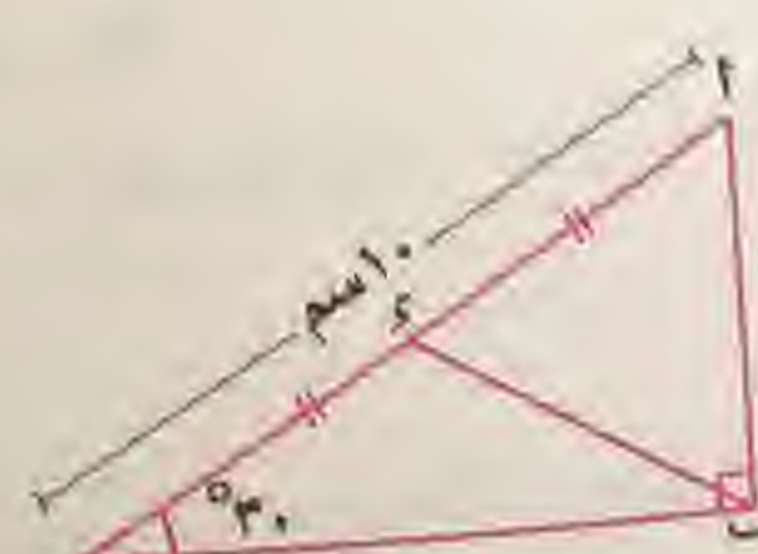
أ حـ = ... سم

، ب ء = ... سم

، م ء = ... ب ء

، م ء = ... سم

٥



ب ء = ... سم

، أ ب = ... سم

، محيط Δ أ ب ء = ... سم

٦



ء و = ... سم

، ء هـ = ... سم

، و هـ = ... سم

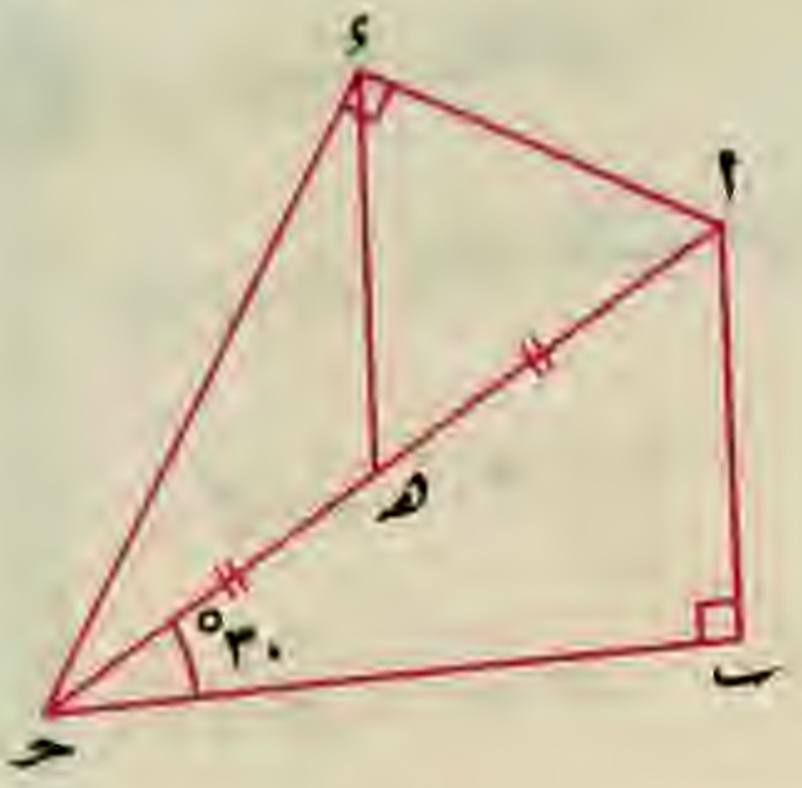
، محيط Δ ء و هـ =

... الشكل المقابل :

... (⦣ ا ب حـ) = ق (⦣ ا ء حـ) = ٩٠°

... (⦣ ا حـ ب) = ٣٠° ، هـ منتصف ا حـ

... أن : ا ب = ء هـ



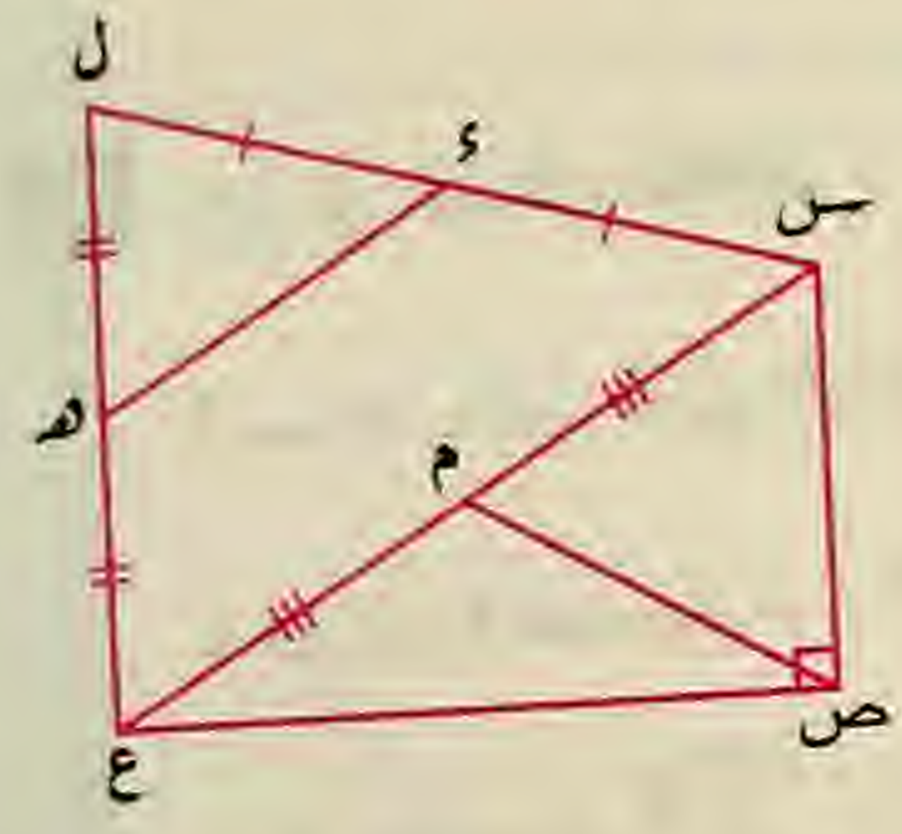
... الشكل المقابل :

... (⦣ س ص ع) = ٩٠°

... منتصف س ل ، هـ منتصف ع ل

... منتصف س ع

... أن : ء هـ = ص م



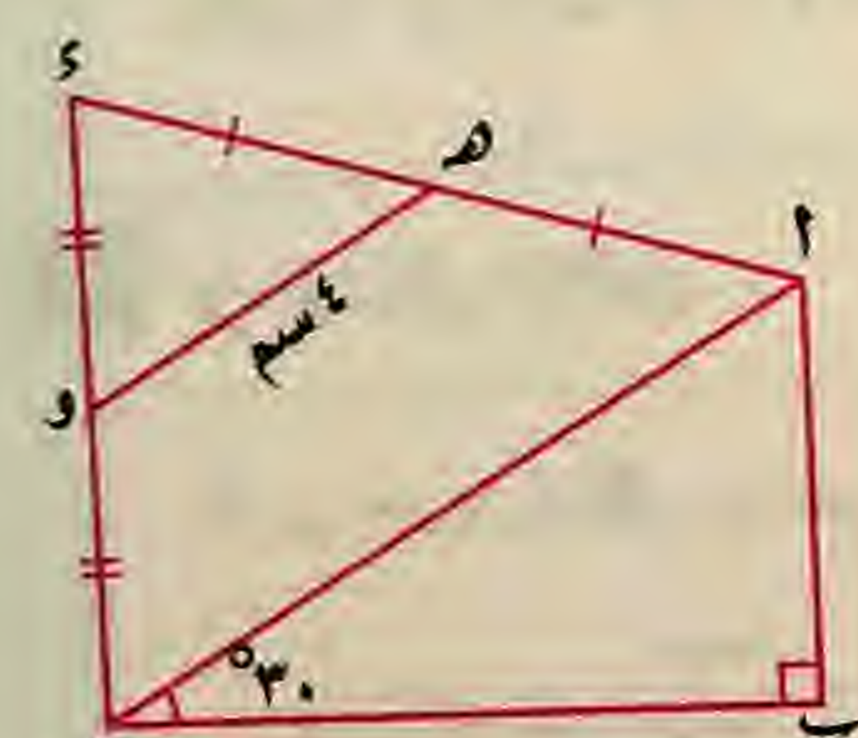
... الشكل المقابل :

... حـ ء شكل رباعى فيه : ق (⦣ ب) = ٩٠°

... منتصف ا ء ، و منتصف حـ ء

... (⦣ ا حـ ب) = ٣٠° ، هـ و = ٤ سم

... بالبرهان : طول ا ب



«٤ سم»

... الشكل المقابل :

... (⦣ ب ا حـ) = ق (⦣ حـ ب هـ) = ٩٠°

... (⦣ ب هـ حـ) = ٣٠°

... و منتصفا ب حـ ، حـ هـ على الترتيب

... ا ء = ٣ سم

... : طول ب و



«٦ سم»

٧ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

، ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠° ، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$

، ء هـ = ب حـ

أثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°



٨ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠° ، أ ب = ٥ سم

، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$ ، إذا كان : ء هـ = ٥ سم

فأثبت أن : ق (∠ أ ء حـ) = ٩٠°



٩ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : ق (∠ ب أ ء) = ٩٠°

، م منتصف $\overline{ب ء}$ ، حـ م = أ م

أثبت أن : ق (∠ ب حـ ء) = ٩٠°



١٠ في الشكل المقابل :

أ ب ء مثلث ، م منتصف $\overline{ب ء}$

، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$ ، و ∈ $\overline{حـ ء}$

، $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب ء}$ ، أ م = هـ و

أثبت أن : ق (∠ ب أ ء) = ٩٠°



الشكل المقابل :

...ح مثلث فيه : ق(∠ب) = ٣٣°

ق(∠ح) = ٩٠°

ء ∈ ب‾ح بحيث : ء‌ح = ٤ سم

ق(∠ب أ ء) = ٢٧°

أوجد : طول أ‾ء



«٨ سم»

الشكل المقابل :

...ب هـ مثلث قائم الزاوية فى ب

...ح هـ مثلث قائم الزاوية فى ح

...حيث هـ ∈ ب‾ح ، أهـ = ٤ سم ، ءهـ = ١٠ سم

ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ أ هـ ء) = ٦٠°

أوجد : طول ب‾ح



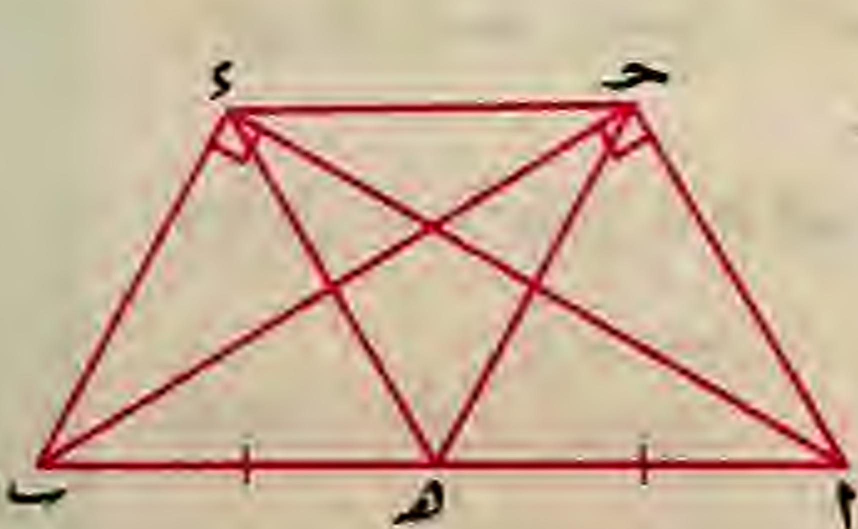
«٧ سم»

الشكل المقابل :

...أ ء ب قائم الزاوية فى ء ، Δ أ ح ب قائم الزاوية فى ح

...هـ منتصف أ‾ب

...ثبت أن : Δ ح هـ ء متساوى الساقين.



الشكل المقابل :

...ق(∠ص ل هـ) = ٩٠° ، ق(∠هـ) = ٣٠°

...ص هـ = ١٠ سم ، ق(∠س ص ع) = ٩٠°

...ل منتصف س‾ع

أوجد : طول س‾ع بالبرهان.



«١٠ سم»

١٥ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ء منتصف $\overline{أحـ}$

، $\overline{ءهـ} \perp \overline{بحـ}$ ، أ ب = ٧ سم ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

أوجد : طول كل من $\overline{بء}$ ، $\overline{ءهـ}$

١٦ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، س ، ص ، ع منتصفات $\overline{أب}$

، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{س ص}$ على الترتيب ، أ حـ = ٨ سم

أوجد : طول كل من $\overline{أب}$ ، $\overline{س ص}$ ، $\overline{بع}$

١٧ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، م نقطة تلاقي متوسطاته

، هـ ∈ $\overline{ءحـ}$ بحيث $\overline{مهـ} \perp \overline{ءحـ}$

، ء هـ = ٣ سم ، م هـ = ٤ سم

أوجد : طول $\overline{بحـ}$

١٨ في الشكل المقابل :



ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، أ ب = ١٢ سم ، أ حـ = ٩ سم

، $\overline{أء}$ متوسط في Δ أ ب حـ

، م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ

أوجد : طول $\overline{أم}$

في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع

ق(∠أ) = ٦٠° ، ء هـ ⊥ ب جـ

أ ء = ١٢ سم ، هـ جـ = ٤ سم

أوجد : محيط متوازي الأضلاع أ ب جـ ء



«٤٠ سم»

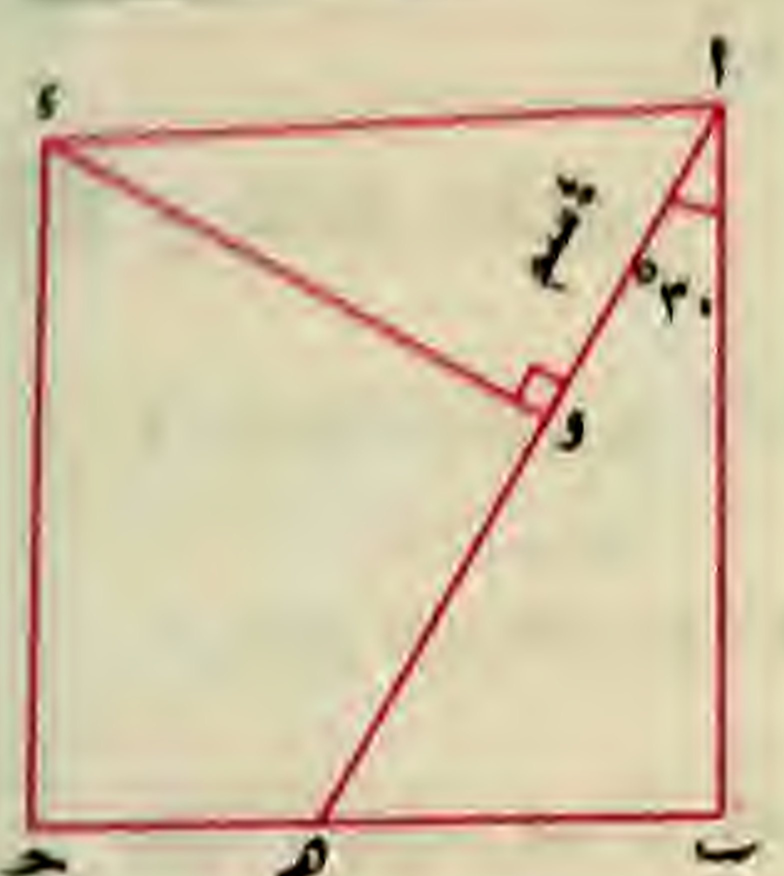
في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مربع ، هـ ∈ ب جـ

بحيث ق(∠ب أ هـ) = ٣٠° ، ء و ⊥ أ هـ

فإذا كان أ و = ٤ سم

احسب : مساحة المربع أ ب جـ ء



«٦٤ سم²»

في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء مستطيل ، هـ ∈ ء جـ بحيث ق(∠جـ ب هـ) = ٣٠°

، ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°

أثبت أن : جـ هـ = $\frac{1}{4}$ أ ب



في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق(∠أ) = ٣٠°

، ء ∈ أ جـ بحيث ب ء ⊥ أ جـ فإذا كان ب جـ = ٨ سم

أوجد : طول أ ء



«١٢ سم»

في الشكل المقابل :

أ ب جـ فيه : ق(∠أ ب جـ) = ٩٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°

ب هـ ⊥ أ جـ ، ب ء متوسط في △ أ ب جـ

أ هـ = ٤ سم احسب : محيط △ أ ب ء



«٢٤ سم»

٢٤ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في حـ

فيه : ق (∠ ب) = ٣٠°

، هـ ، و ، س ، ص منتصفات ب‾حـ ، أ‾حـ ، ء‾هـ ، ء‾و على الترتيب

أثبت أن : س ص = ½ أ حـ

٢٥ في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : س منتصف أ‾ب

، رسم س‾ص يوازي ب‾حـ ويقطع ء‾حـ في ص

فإذا كانت : هـ ∈ أ‾ء ، و ∈ ب‾حـ بحيث

ق (∠ هـ ص و) = ٩٠° ، هـ‾و ∩ س‾ص = {ع}

فأثبت أن : ص ع = ½ هـ و

٢٦ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، رسم أ‾ء عموديًا على ب‾حـ حيث أ‾ء ∩ ب‾حـ = {ء}

فإذا كانت هـ ، و منتصفي أ‾ب ، أ‾حـ على الترتيب

أثبت أن : ء هـ + ء و = أ ب

٢٧ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، هـ منتصف أ‾ب ، و ∈ ب‾حـ بحيث :

هـ‾و // أ‾حـ

، ء ∈ ب‾و بحيث ب ء = ٤ سم ، ء حـ = ١٢ سم

أوجد : طول ء‾هـ



الدرس

3

المثلث المتساوى الساقين

تمهيد

تُصنف المثلثات حسب أطوال أضلاعها إلى ثلاثة أنواع هى :

١ مثلث مختلف الأضلاع



أب ≠ ب حـ ≠ حـ أ

٢ مثلث متساوى الساقين « متطابق الضلعين »



ء هـ = ء و

٣ مثلث متساوى الأضلاع « متطابق الأضلاع »



س ص = ص ع = ع س

وفيما يلى سوف ندرس العلاقات بين الزوايا فى المثلث المتساوى الساقين والمتساوى الأضلاع.

نظرية المثلث المتساوى الساقين

[١] ... القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.



المعطيات: أ ب حـ مثلث فيه $\overline{أب} \equiv \overline{أحـ}$

المطلوب: إثبات أن : ∠ب ≡ ∠حـ

العمل: نرسم $\overleftrightarrow{أء} \perp \overline{ب حـ}$ حيث $\overleftrightarrow{أء} \cap \overline{ب حـ} = \{ء\}$

البرهان: ∵ ΔΔ أ ء ب ، أ ء حـ فيهما :

ق(∠أ ء ب) = ق(∠أ ء حـ) = ٩٠° (عملاً)

$\overline{أب} \equiv \overline{أحـ}$ (معطى)

$\overline{أء}$ (ضلع مشترك)

∴ Δ أ ء ب ≡ Δ أ ء حـ

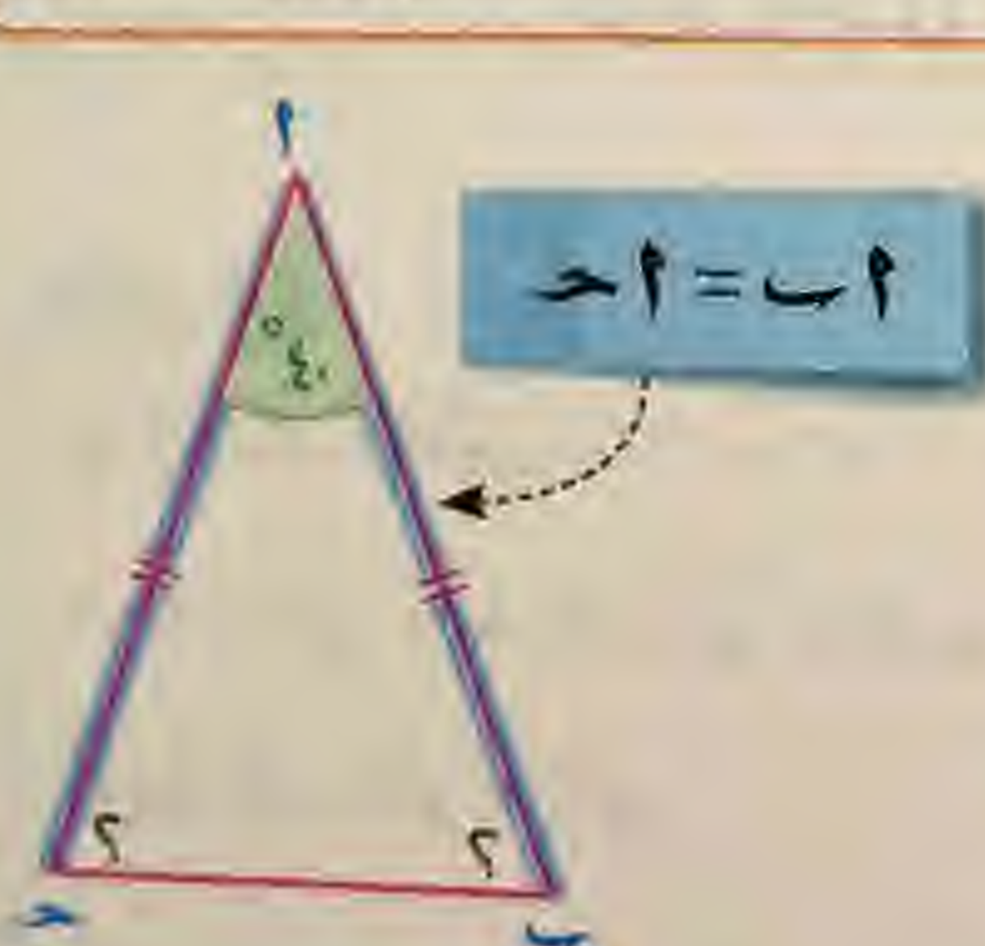
وينتج أن : ∠ب ≡ ∠حـ (وهو المطلوب)

فى الشكل المقابل :

... أ ب حـ مثلث فيه :

... = أحـ ، ق(∠أ) = ٤٠°

... ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°



ملاحظات

- كل من زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين حادة.
- زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة.

مثال ١

في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ

، ق (∠ أ) = ٤٢° ، د ∈ ب جـ

أوجد : ق (∠ أ جـ د)



الحل

المعطيات	أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ) = ٤٢°
المطلوب	إيجاد : ق (∠ أ جـ د)
البرهان	∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب جـ الداخلة = ١٨٠° ، ق (∠ أ) = ٤٢°

∴ ق (∠ ب) + ق (∠ أ جـ ب) = ١٨٠° − ٤٢° = ١٣٨°

، ∵ أ ب = أ جـ (معطى)

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ أ جـ ب)

$= \frac{138°}{2} = 69°$ (= ٦٩°)

، ∵ ∠ أ جـ د خارجة عن △ أ ب جـ

∴ ق (∠ أ جـ د) = ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ٤٢° + ٦٩° = ١١١° (وهو المطلوب)

تذكر أن

قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها.

مثال ٢

في الشكل المقابل :

ب ∈ د هـ ، جـ ∈ د هـ ، أ ب = أ جـ ، ب د = جـ هـ

أثبت أن : أ د = أ هـ



الحل

المعطيات	أ ب = أ جـ ، ب د = جـ هـ
المطلوب	إثبات أن : أ د = أ هـ
البرهان	∵ أ ب = أ جـ (معطى) ∴ ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ جـ ب)

، ∵ ∠ ا ب ء تكمل ∠ ا ب ح ، ∠ ا ح هـ تكمل ∠ ا ح ب

∴ ق(∠ ا ب ء) = ق(∠ ا ح هـ)

∴ ∆∆ ا ب ء ، ا ح هـ فيهما :

ا ب = ا ح (معطى)

ب ء = ح هـ (معطى)

ق(∠ ا ب ء) = ق(∠ ا ح هـ) (برهانًا)

∴ ∆ ا ب ء ≡ ∆ ا ح هـ وينتج أن : ا ء = ا هـ (وهو المطلوب)

تذكر أن

مكملات الزوايا المتساوية فى القياس متساوية فى القياس.

الشكل المقابل :

=ا ح ، ق(∠ ب ا ح) = ٦ س

(∠ ح) = ٣ س ، ب ح // ء هـ

: ١ قيمة س ٢ ق(∠ هـ ء ا)



المعطيات: ا ب = ا ح ، ق(∠ ب ا ح) = ٦ س ، ق(∠ ح) = ٣ س ، ب ح // ء هـ

المطلوب: إيجاد : ١ قيمة س ٢ ق(∠ هـ ء ا)

البرهان: ∵ ا ب = ا ح ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ح) = ٣ س

، ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ٦ س + ٣ س + ٣ س = ١٨٠°

∴ ١٢ س = ١٨٠° ∴ س = ١٨٠° ÷ ١٢ = ١٥° (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ ح) = ٤٥° ، ∵ ب ح // ء هـ ، ح ء قاطع لهما

∴ ق(∠ هـ ء ا) + ق(∠ ح) = ١٨٠° (داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)

∴ ق(∠ هـ ء ا) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥° (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ١

في كل من الأشكال الآتية أوجد قيم الرموز المستخدمة في قياسات الزوايا :

١



س = ...° ، ص = ...°

٢



س = ...° ، ص = ...°

٣



س = ...° ، ص = ...° ، ع = ...°

٤



س = ...° ، ص = ...°

٥



س = ...°

٦



س = ...°

نتيجة

إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاث تكون متطابقة ويكون قياس كل منها ٦٠°

فمثلًا : في الشكل المقابل :



إذا كان : س ص ع مثلثًا فيه :

س ص = ص ع = س ع

فإن : ق (∠ س) = ق (∠ ص) = ق (∠ ع) = ٦٠°

مثال ٤

في الشكل المقابل :



أ ب = ب حـ = حـ أ = أ ء ، ق (∠ ء) = ٧٠°

أوجد : ١ ق (∠ ب حـ ء) ٢ ق (∠ ب أ ء)

ا ب = ب حـ = حـ ا = ا ء ، ق (∠ ء) = ٧٠°

إيجاد : ① ق (∠ ب حـ ء) ② ق (∠ ب ا ء)

∵ △ ا ب حـ متساوى الأضلاع. ∴ ق (∠ ب حـ ا) = ٦٠°

، فى △ ا حـ ء : ∵ ا حـ = ا ء ∴ ق (∠ ا حـ ء) = ق (∠ ء) = ٧٠°

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ق (∠ ب حـ ا) + ق (∠ ا حـ ء)

= ٦٠° + ٧٠° = ١٣٠° (المطلوب أولاً)

، ∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى ا ب حـ ء الداخلة = ٣٦٠°

، ق (∠ ب) = ٦٠°

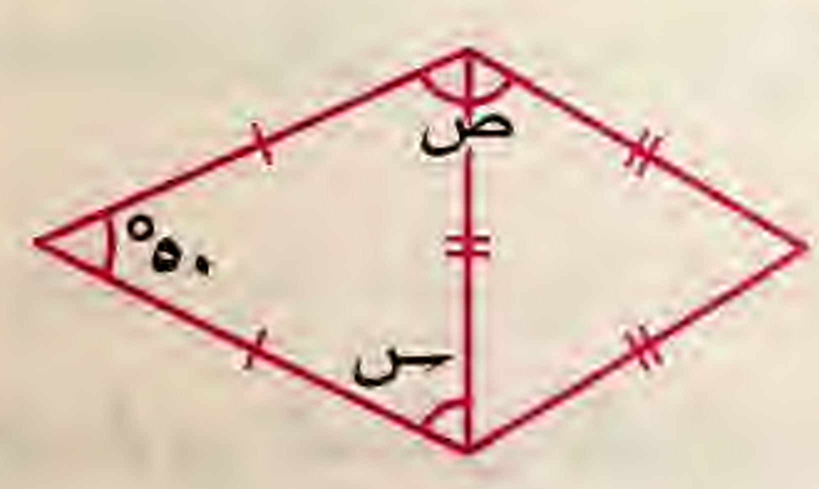
∴ ق (∠ ب ا ء) = ٣٦٠° − (٦٠° + ١٣٠° + ٧٠°) = ١٠٠° (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ٢

فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيم الرموز المستخدمة فى قياسات الزوايا :



س = ...° ، ص = ...°

② 

س = ...° ، ص = ...°

③ 

س = ...° ، ص = ...°

تمارين 3

على المثلث المتساوى الساقين

أسئلة كتاب الوزارة

١ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية :

١ 

س = ...°

٢ 

س = ...°

٣ 

ص = ...°

٤ 

ل = ...°

٥ 

س = ...° ، ص = ...°

٦ 

س = ...° ، ص = ...°

٧ 

س = ...°

٨ 

س = ... ، ص = ...

٢ أكمل ما يأتى :

١ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين تكونان ....

٢ قياس كل زاوية فى المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

٣ إذا كان ء هـ و مثلث فيه : ء هـ = ء و فإن : ق (∠ هـ) = ق (∠ ....)

٤ فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة ٦٥° فإن قياس زاوية رأسه يساوى ....°

٥ فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان قياس زاوية الرأس ٤٠° فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة يساوى ....°

في Δ أ ب جـ إذا كان : أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ) = ٨٠°

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ ....) = ...°

مثلث متساوى الساقين قياس زاوية رأسه ٨٠° فإذا كان قياس إحدى زاويتى قاعدته (س + ٣٠)° فإن : س = ...

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

في Δ س ص ع إذا كان : س ص = ص ع = س ع فإن : ق (∠ س) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

إذا كان : أ ب جـ مثلثًا قائم الزاوية فى أ ، أ ب = أ جـ فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ٣٠° كان المثلث ....

(أ) منفرج الزاوية. (ب) حاد الزوايا. (جـ) قائم الزاوية. (د) متساوى الأضلاع.

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ ، ق (∠ ب) = ٦ س° ، ق (∠ أ) = ٣ س°

فإن : س = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

في Δ س ص ع إذا كان : س ص = س ع فإن الزاوية الخارجة عند الرأس ع تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) منعكسة.

٤ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ جـ

، ق (∠ أ) = ٤٠° ، د ∈ $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$

١ أوجد : ق (∠ أ ب جـ)

٢ أثبت أن : ∠ أ ب د ≡ ∠ أ جـ هـ



٥ في الشكل المقابل :

أ ب = أ جـ = جـ د

، ق (∠ ب) = ٧٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب أ د)



٦ في الشكل المقابل :

ق (∠ ب) = ٤٠° ، ق (∠ ب أ جـ) = ٣٠°

، أ جـ = أ د

أوجد بالبرهان :

١ ق (∠ د) ٢ ق (∠ جـ أ د)



٧ في الشكل المقابل :

أ د = د جـ = أ جـ ، أ ب = ب جـ

، ق (∠ أ ب جـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب أ د)



٨ في الشكل المقابل :

أ ب = أ د ، $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ق (∠ ب أ د) = ١٢٠° ، ق (∠ ب د جـ) = ٦٥°

أوجد : ١ ق (∠ أ د ب) ٢ ق (∠ جـ)



٩ في الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث فيه : ا حـ = ب حـ

، $\overleftrightarrow{ا ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ء ا حـ) = ٣٠°

أوجد : قياسات زوايا Δ ا ب حـ

« ٣٠° ، ٧٥° ، ٧٥° »

١٠ في الشكل المقابل :



ا ب = ا حـ ، ق (∠ ب ا حـ) = ٨٠°

، حـ هـ = هـ ء = حـ ء

أوجد بالبرهان : ق (∠ ب حـ ء)

« ١١٠° »

١١ في الشكل المقابل :



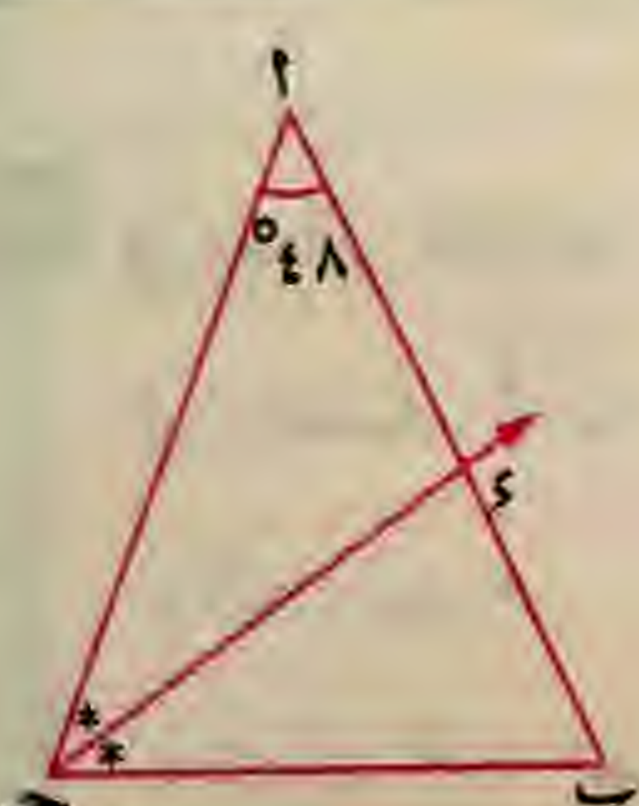
ا ب = ب حـ ، ا ء = حـ ء

، ق (∠ ب ا ء) = ١١٤° ، ق (∠ ب) = ٨٠°

أوجد : ق (∠ ا ء حـ)

« ٥٢° »

١٢ في الشكل المقابل :



ا ب = ا حـ ، ق (∠ ب ا حـ) = ٤٨°

، $\overrightarrow{حـ ء}$ ينصف ∠ ب حـ ا ويقطع $\overline{ا ب}$ في ء

أوجد :

١ ق (∠ ب)

٢ ق (∠ ب حـ ء)

« ٦٦° ، ٣٣° »

١٣ في الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

نصفت ∠ ب ، ∠ حـ بمنصفين تلاقيا في ء

أوجد : ق (∠ ب ء حـ)

« ١٢٠° »

١٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

، ء ب = ء حـ

، ق (∠ ب ء حـ) = ١٠٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ ب ء)



١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث ب حـ = حـ ء

أثبت أن : $\overline{\text{ب أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

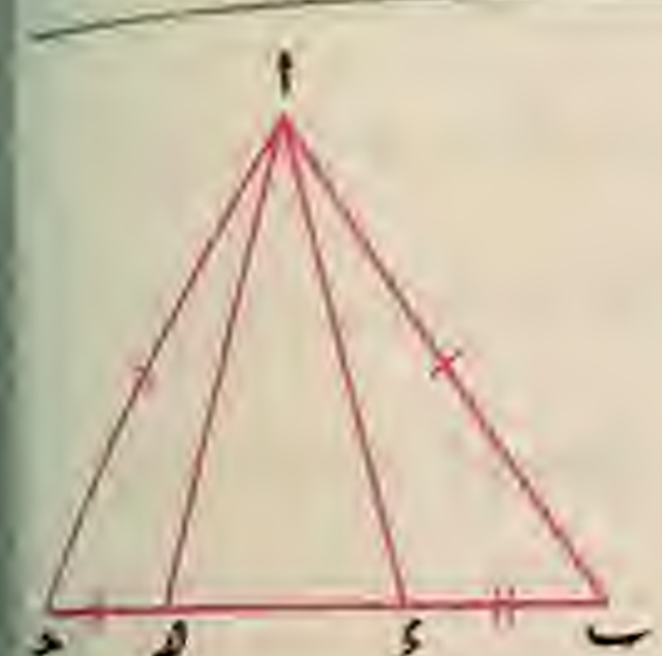


١٦ 📖 في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ≡ $\overline{\text{حـ هـ}}$

أثبت أن : ١ Δ أ ء هـ متساوى الساقين.

٢ ∠ أ هـ ء ≡ ∠ أ ء هـ



١٧ في الشكل المقابل :

هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، أ ء = ب حـ

، ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

، ق (∠ ء هـ حـ) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ هـ ء حـ)



١٨ 📖 في الشكل المقابل :

ع ∈ $\overline{\text{ل ص}}$ ، س ع = ص ع

، ق (∠ ل ع س) = ١٣٠° ، $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

أوجد : ق (∠ م ل ص)



في الشكل المقابل :

أ ∈ ب ء ، أ ب = أ حـ

، أ هـ // ب حـ

أثبت أن : أ هـ ينصف ∠ ء أ حـ



في الشكل المقابل :

أ ب = ب حـ ، ب هـ ينصف ∠ حـ ب ء

أثبت أن : ب هـ // أ حـ



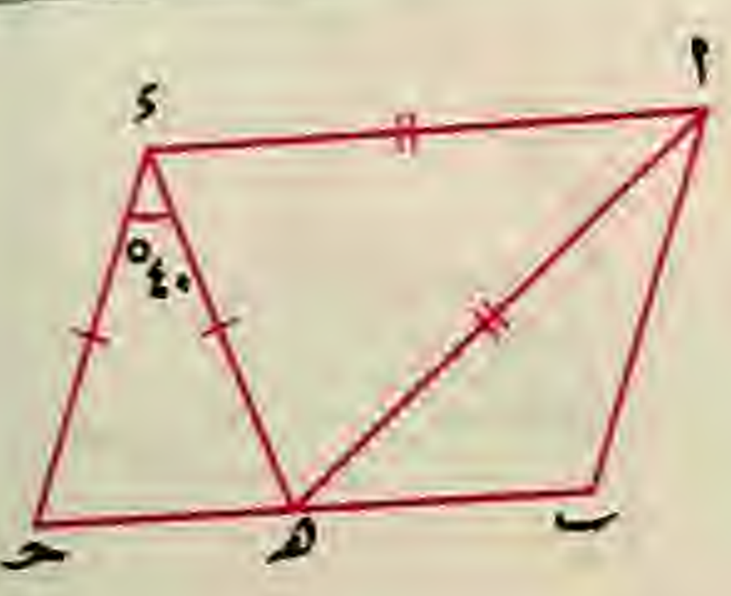
في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب حـ

حيث أ هـ = أ ء ، ء هـ = ء حـ

، ق (∠ هـ ء حـ) = ٤٠°

أوجد : [١] ق (∠ أ هـ ء) [٢] ق (∠ ب أ هـ)



« ٧٠° ، ٣٠° »

في الشكل المقابل :

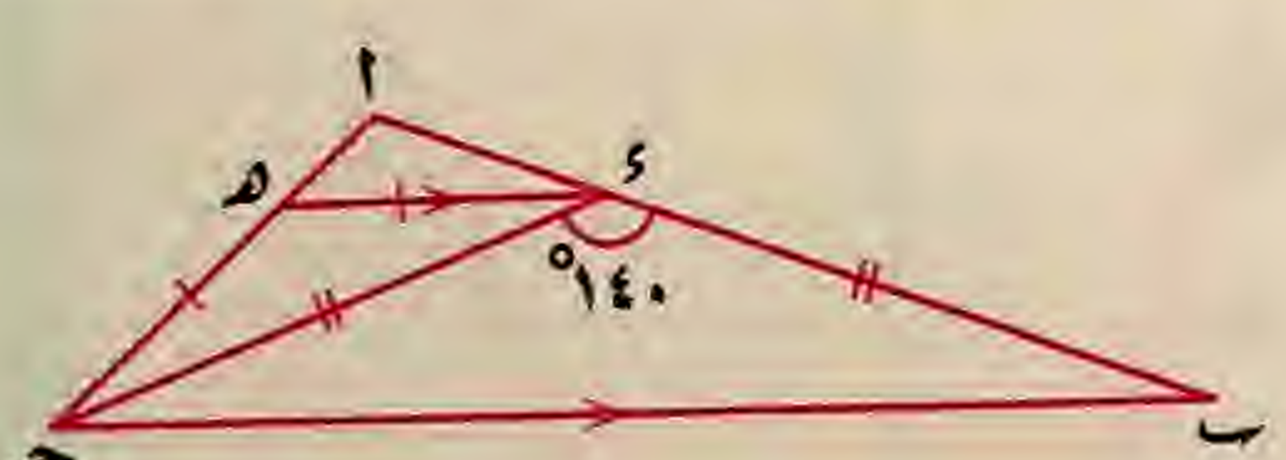
أ ب حـ مثلث فيه :

ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ حـ بحيث

ء هـ // ب حـ ، ء هـ = هـ حـ

، ء ب = ء حـ ، ق (∠ ب ء حـ) = ١٤٠°

أوجد : ق (∠ أ)



« ١٢٠° »

في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ

، ق (∠ ب) = ٢ س + ١٣°

، ق (∠ حـ) = ٣ س − ١٧°

أوجد : قياسات زوايا Δ أ ب حـ



« ٧٣° ، ٧٣° ، ٣٤° »

٢٤ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم فى قياس الزاوية :

١



س = ...° ، ص = ...°

٢



س = ...° ، ص = ...°

٣



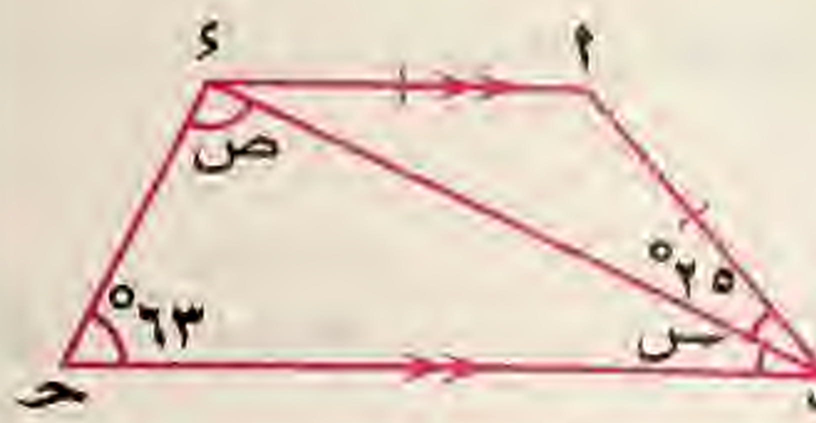
س = ...°

٤



س = ...° ، ص = ...°

٥ $\overline{أ ء} // \overline{ب حـ}$



س = ...° ، ص = ...°

٦



ص = ...° ، ل = ...°

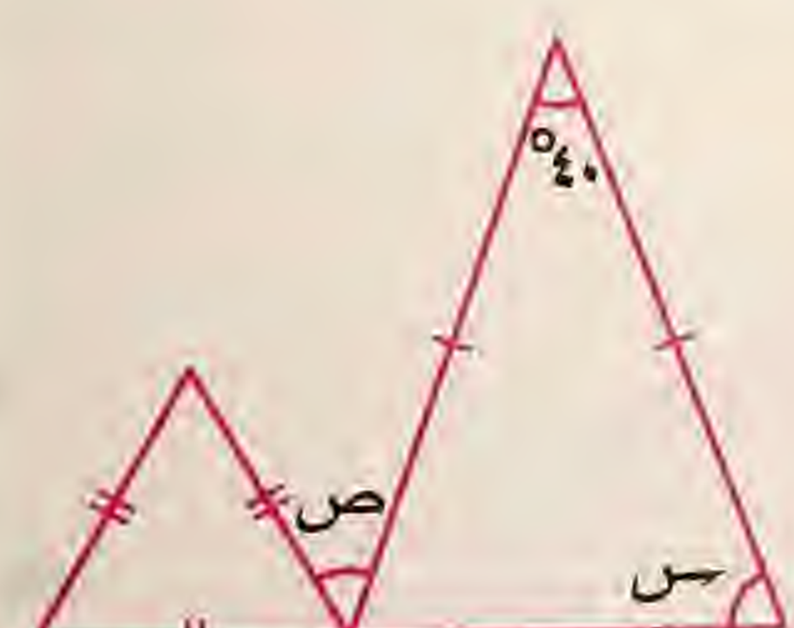
، ع = ...°

٧



س = ...° ، ص = ...°

٨



س = ...° ، ص = ...°

٩ $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ∠ حـ أ ء



س = ...°

١٠ أ ب = أ حـ



س = ...°

١١



س = ...°

١٢



س = ...°

أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية :

١



س = ... سم

٢



س = ...°

٣



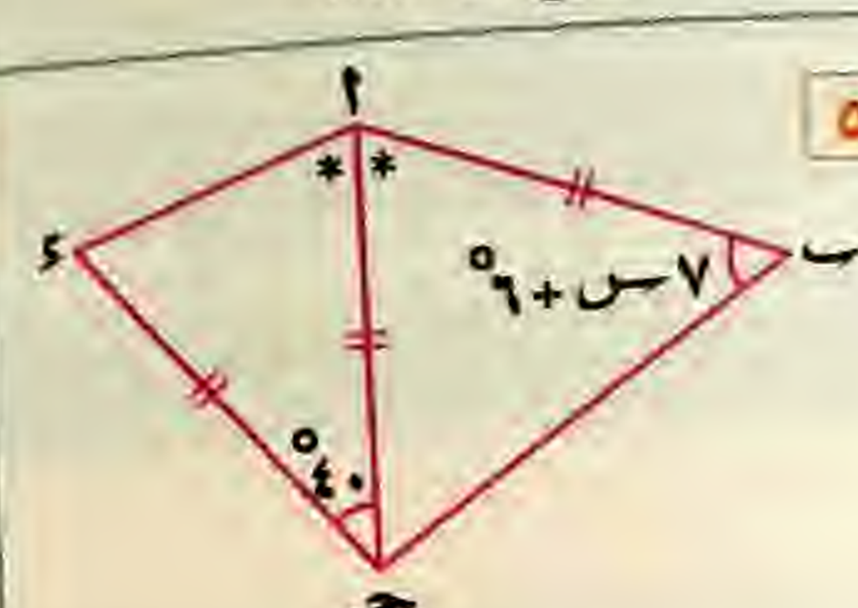
س = ...°

٤



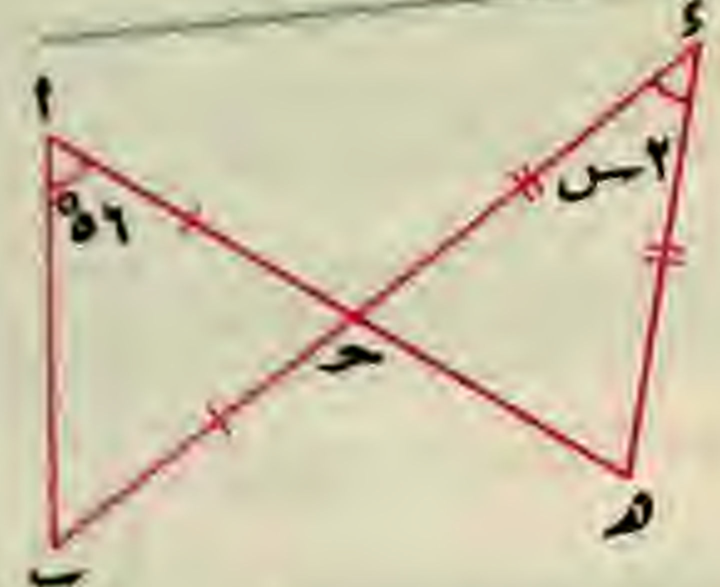
س = ...°

٥



س = ...°

٦



س = ...°

في الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث فيه :

ء ∈ ا ب ، هـ ∈ ب حـ ، و ∈ ا حـ بحيث :

ق(∠ء هـ و) = ٩٠° ، ء ب = ء هـ ، و هـ = و حـ

أوجد : ق(∠ا)

«٩٠°»

في الشكل المقابل :



ا ب = ب حـ ، هـ ∈ ا ء

ب ء ينصف كلاً من ∠حـ ب هـ ، ∠حـ ء هـ

أثبت أن : ق(∠ا) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

٢٨ في الشكل المقابل :

ق (∠ س) = ق (∠ ع) = ٩٠° ، س ص = م ع ، ص م = ع ل

أوجد مع ذكر السبب : ق (∠ م س ل) «٤٥°»



---

٢٩ في الشكل المقابل :

أب // حـ ء

، هـ ∈ ب ء بحيث

أهـ ينصف ∠ ب أ حـ ، حـ هـ ينصف ∠ أ حـ ء

، ب أ = ب هـ ، ق (∠ ء هـ حـ) = ٢٤°

أوجد : ق (∠ أ ب هـ)



تطبيق حياتي

٣٠ في الشكل المقابل :

طائرة ورقية أ ب حـ ء تتكون من مثلثين أ ب ء متساوى الأضلاع

، ب حـ ء متساوى الساقين فيه : حـ ب = حـ ء فإذا كان : ق (∠ حـ) = ٥٠°

فأوجد : ق (∠ أ ب حـ) «١٢٥°»



للمتفوقين

٣١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء ∈ أ حـ

بحيث ب ء = ء حـ ، أ ء = أ ب ، هـ ∈ حـ أ

اثبت أن : ق (∠ ب أ هـ) = ٤ ق (∠ ب حـ ء)



---

٣٢ في الشكل المقابل :

ق (∠ أ) = س°

، أ ب = ب حـ = حـ ء = ء هـ

، ق (∠ ء هـ و) = ١٢٦°

أوجد : قيمة س





الدرس 4

نظرية ٢

إذا تطابقت زاويتان ...
ويكون المثلث متساوي ...

المعطيات
المطلوب
العمل
البرهان



الدرس **4**

عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين

نظرية ٢

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ويكون المثلث متساوى الساقين.



المعطيات أ ب حـ مثلث فيه : ∠ ب ≡ ∠ حـ

المطلوب إثبات أن : أ ب ≡ أ حـ

العمل ننصف ∠ ب أ حـ بالمنصف أ ء فيقطع ب حـ فى ء

البرهان ∵ ∠ ب ≡ ∠ حـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

، ∵ أ ء ينصف ∠ ب أ حـ   ∴ ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ ء حـ)

∴ ΔΔ أ ب ء ، أ حـ ء فيهما :

أ ء   (ضلع مشترك)

ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)   (عملاً)

ق (∠ أ ء ب) = ق (∠ أ ء حـ)   (برهاناً)

∴ Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ ء وينتج من التطابق أن : أ ب ≡ أ حـ

ويكون Δ أ ب حـ متساوى الساقين.   (وهو المطلوب)

مثال ١

Δ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب) = ٧٢° أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوي الساقين.



الحل

المعطيات ق(∠أ) = ٢ ق(∠ب) = ٧٢°

المطلوب إثبات أن : Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

البرهان

∵ ٢ ق(∠ب) = ٧٢° ∴ ق(∠ب) = ٧٢° ÷ ٢ = ٣٦°

، ∵ ق(∠أ) = ٧٢° ∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٣٦° + ٧٢°) = ٧٢°

∴ ق(∠أ) = ق(∠حـ) ∴ ب حـ = ب أ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين. (وهو المطلوب)

مثال ٢

في الشكل المقابل :

ء ∈ أب ، هـ ∈ أحـ بحيث أء = أهـ ، ءهـ // ب حـ

أثبت أن : ءب = هـ حـ



الحل

المعطيات أء = أهـ ، ءهـ // ب حـ

المطلوب إثبات أن : ءب = هـ حـ

البرهان

في Δ أءهـ : ∵ أء = أهـ ∴ ق(∠أءهـ) = ق(∠أهـء) (١)

، ∵ ءهـ // ب حـ ، أب قاطع لهما

∴ ق(∠أءهـ) = ق(∠ب) (بالتناظر) (٢)

وبالمثل : ∵ ءهـ // ب حـ ، أحـ قاطع لهما

∴ ق(∠أهـء) = ق(∠حـ) (بالتناظر) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∴ أب = أحـ ، ∵ أء = أهـ

وبالطرح ∴ أب − أء = أحـ − أهـ ∴ ءب = هـ حـ (وهو المطلوب)

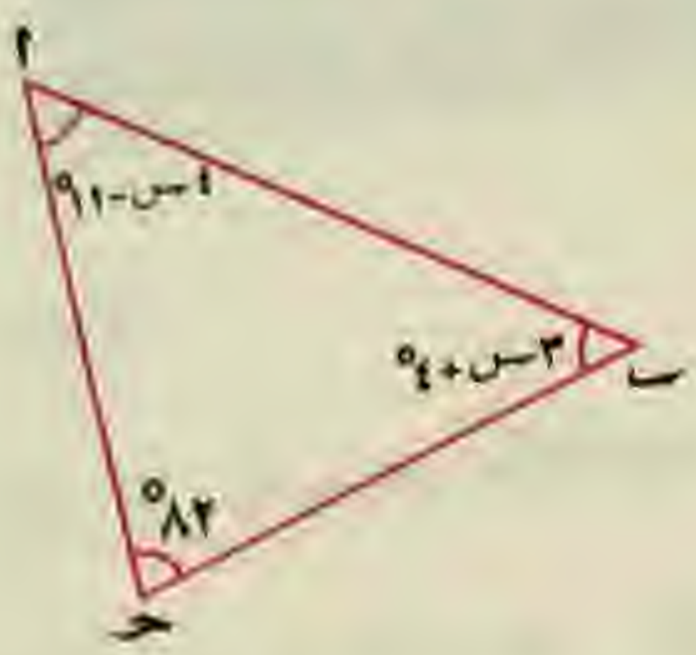
مثال ٣

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ ٲ) = ٤ س − ١١°

، ق (∠ ب) = ٣ س + ٤° ، ق (∠ حـ) = ٨٢°

أثبت أن : Δ ٲ ب حـ متساوى الساقين.



الحل

المعطيات	ق (∠ ٲ) = ٤ س − ١١° ، ق (∠ ب) = ٣ س + ٤° ، ق (∠ حـ) = ٨٢°
المطلوب	إثبات أن : Δ ٲ ب حـ متساوى الساقين.
البرهان	∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ٤ س − ١١° + ٣ س + ٤° + ٨٢° = ١٨٠°

∴ ٧ س + ٧٥° = ١٨٠° ∴ ٧ س = ١٠٥°

∴ س = ١٥° ∴ ق (∠ ٲ) = ٤ × ١٥° − ١١° = ٤٩°

، ق (∠ ب) = ٣ × ١٥° + ٤° = ٤٩° ∴ ق (∠ ٲ) = ق (∠ ب)

∴ ب حـ = ٲ حـ

∴ Δ ٲ ب حـ متساوى الساقين. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ١

فى كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول :

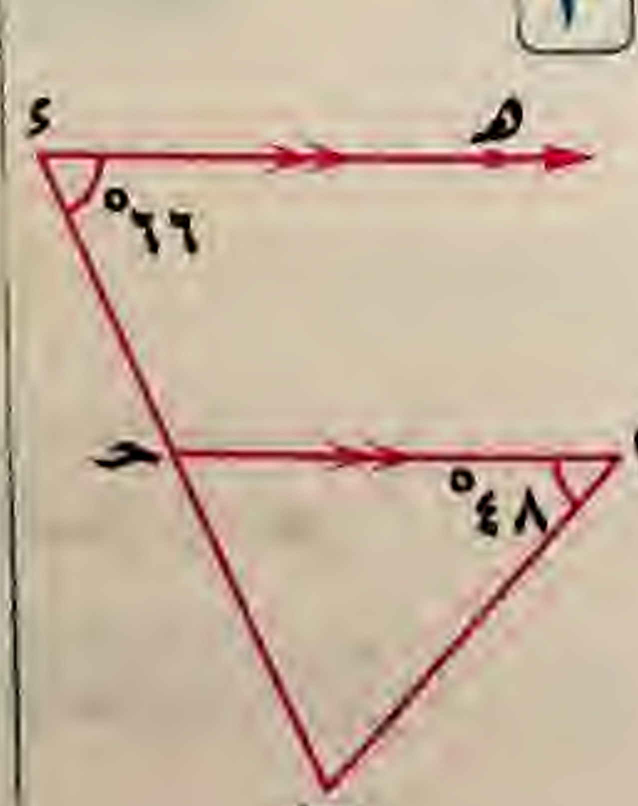
١



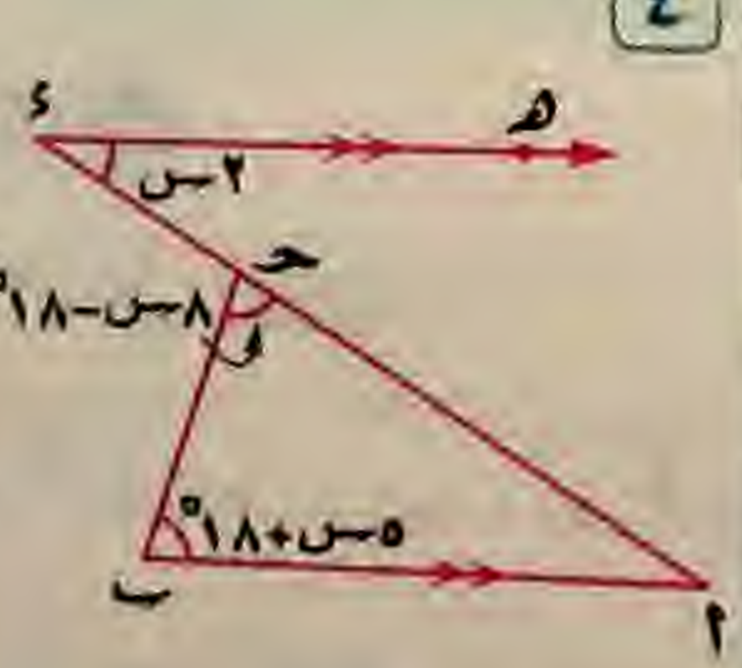
٢



٣



٤



نتيجة

إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.



فمثلًا :

إذا كان ا ب حـ مثلثًا فيه :

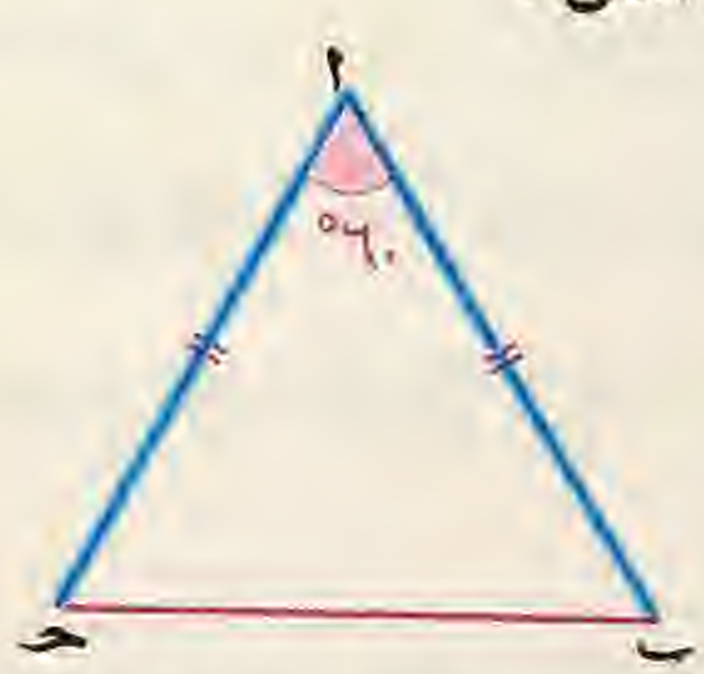
∠ ا ≡ ∠ ب ≡ ∠ حـ فإن : ا ب = ب حـ = حـ ا

أى أن : Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع.

ملاحظة

المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع.

• في الشكل التالى :



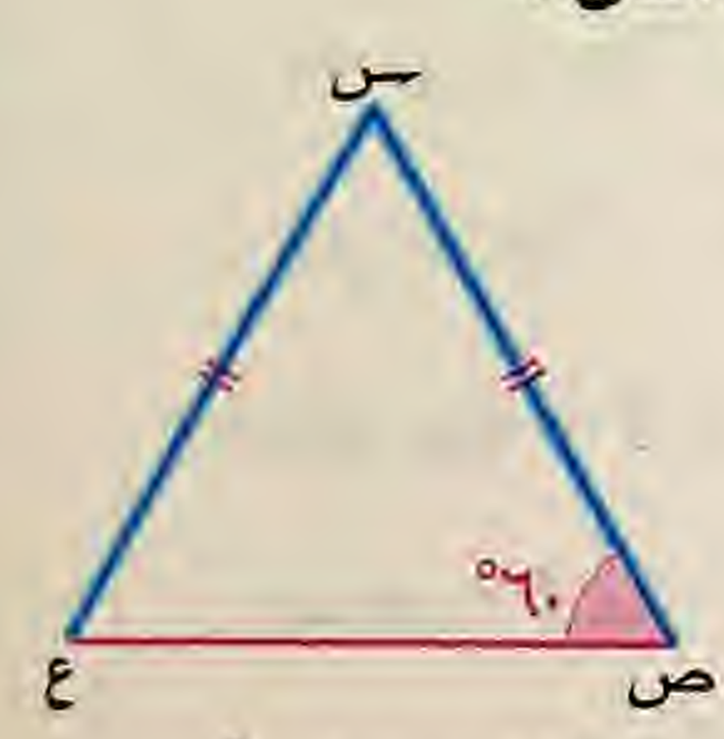
إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق (∠ ا) = ٦٠°

فإن : ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)

$= \frac{١٨٠° - ٦٠°}{٢} = ٦٠°$

∴ Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع.

• في الشكل التالى :



إذا كان : س ص = س ع

، ق (∠ ص) = ٦٠° فإن : ق (∠ ع) = ٦٠°

، ق (∠ س) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

∴ Δ س ص ع متساوى الأضلاع.

مثال ٤

في الشكل المقابل :



ب م ينصف ∠ ب ، حـ م ينصف ∠ حـ

، م ب = م حـ ، ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°

أثبت أن : Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع.

الحل

المعطيات: $\overleftarrow{ب م}$ ينصف ∠ ب ، $\overleftarrow{حـ م}$ ينصف ∠ حـ ، م ب = م حـ ، ق(∠ ب م حـ) = ١٢٠°

المطلوب: إثبات أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع.

البرهان: ∵ Δ م ب حـ فيه : م ب = م حـ ، ق(∠ ب م حـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠ م ب حـ) = ق(∠ م حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

، ∵ $\overleftarrow{ب م}$ ينصف ∠ ب ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٢ ق(∠ م ب حـ) = ٦٠°

، ∵ $\overleftarrow{حـ م}$ ينصف ∠ حـ ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٢ ق(∠ م حـ ب) = ٦٠°

∴ فى Δ أ ب حـ يكون : ق(∠ ب أ حـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ ب أ حـ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك ٢

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ء = ء حـ = حـ ب = حـ أ ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع.



[illegible]

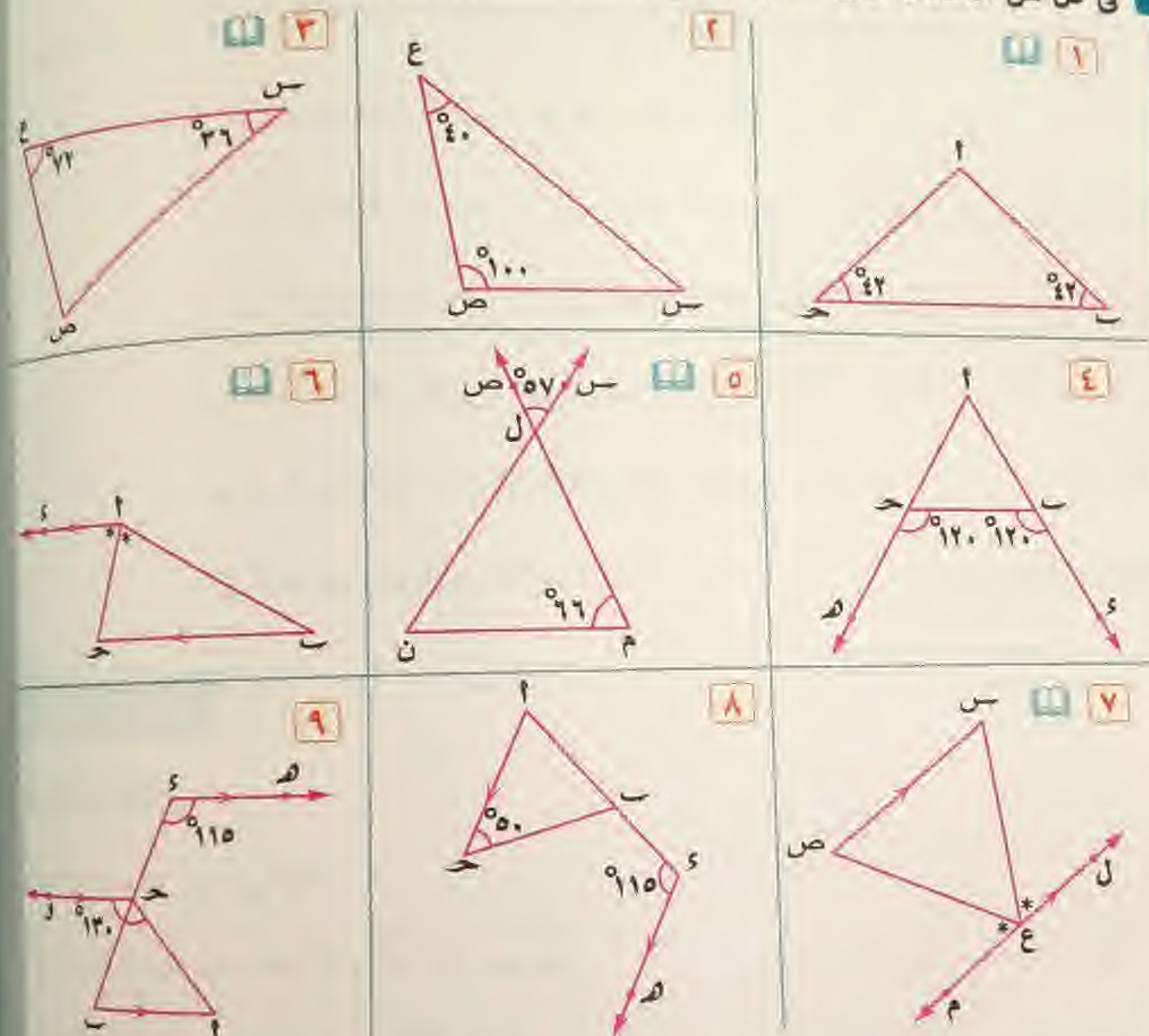
تمارين 4

على عكس نظرية المثلث المتساوى الساقين



أسئلة كتاب الوزارة

١ فى كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية فى الطول :



٢ أكمل ما يأتى :

١ إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان .... ويكون المثلث ....

٢ إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون ....

٣ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق(∠أ) = ٥٠° ، ق(∠ب) = ٨٠° كان المثلث ....

إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية ٤٥° فإن المثلث ....

إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين يساوى ٦٠° كان المثلث ....

مثلث أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ ، ق (∠ أ) = ٦٠° فإذا كان محيطه = ١٨ سم فإن : ب جـ = ... سم

في الشكل المقابل :



ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، ق (∠ أ ب ء) = ١٢٥°

، ق (∠ أ) = ٧٠°

أثبت أن : Δ أ ب جـ متساوى الساقين.

في الشكل المقابل :



س ص = س ع ، ق (∠ س ص ل) = ١٢٠°

، ل ∈ $\overleftrightarrow{\text{ع ص}}$

أثبت أن : Δ س ص ع متساوى الأضلاع.

في الشكل المقابل :



ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

، ق (∠ جـ ب ء) = ق (∠ أ جـ هـ) = ١٢٠°

أثبت أن : Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع.

في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ أ ء ب) = ٤٠°

، ق (∠ ب ء جـ) = ١٠٠°

أثبت أن : Δ ء ب جـ متساوى الساقين.

٧ في الشكل المقابل :



ب ∈ س ص ، س ص // أحـ

، ق(∠أب س) = ٦٢° ، ق(∠حـ) = ٥٦°

أثبت أن : أحـ = ب حـ

٨ في الشكل المقابل :



أب حـ مثلث فيه : أب = أحـ ، س ∈ أب

، ص ∈ أحـ ، س ص // ب حـ

أثبت أن : ١ △ أ س ص متساوي الساقين.

٢ س ب = ص حـ

٩ أب حـ مثلث فيه : ء ∈ أب ، هـ ∈ ب حـ بحيث كان ب ء = ب هـ

، فإذا كان ء هـ // أحـ أثبت أن : أب = ب حـ

١٠ في الشكل المقابل :



أحـ ∩ ب ء = {م} ، م ب = م حـ ، أ ء // ب حـ

أثبت أن : م أ = م ء

١١ في الشكل المقابل :



ب ∈ أهـ ، حـ ∈ ب ء ، أب = ٨ سم

، ب حـ = ١٠ سم ، ق(∠هـ ب حـ) = ق(∠أحـ ء)

أوجد : محيط المثلث أب حـ

(٢٦ سم)

١٢ في الشكل المقابل :



أب = أحـ ، ء هـ // أب

، ء و // أحـ

أثبت أن :

١ ء هـ = ء و

٢ ق(∠ب أحـ) = ق(∠هـ ء و)

في الشكل المقابل :

ب ء ينصف ∠ أ ب حـ ، ويقطع أحـ في ء

، هـ ء // ب حـ حيث هـ ∈ أ ب

أثبت أن : Δ هـ ب ء متساوى الساقين.



في الشكل المقابل :

أ ∈ ب ء ، أ هـ // ب حـ

، أ هـ ينصف ∠ حـ أ ء

أثبت أن : أ ب = أ حـ



في الشكل المقابل :

ب ء = حـ هـ ، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

، ق (∠ ء) = ق (∠ هـ) = ٩٠°

برهن أن : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ حـ أ هـ)



في الشكل المقابل :

ص ع س مثلث فيه : ص ع = ص س

، ق (∠ ص) = ٥٠°

، ق (∠ ص س م) = ١٥°

أثبت أن : Δ م ع س متساوى الساقين.



في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٧٠°

، ق (∠ م حـ أ) = ٢٥° ، ق (∠ م ب حـ) = ٣٠°

أثبت أن : Δ م ب حـ متساوى الساقين.



١٨ في الشكل المقابل :

أء = أحـ ، ق(∠ب) = ٤٠° ، ق(∠ب أ ء) = ٣٠°

أثبت أن : أب = حـ ب



١٩ أ ب حـ مثلث فيه : أب = أحـ ، ب ء ينصف ∠أ ب حـ ، حـ ء ينصف ∠أ حـ ب

أثبت أن : Δ ء ب حـ متساوى الساقين.

٢٠ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع ، و ∈ أحـ

، ء ∈ حـ ب ، ق(∠ء و حـ) = ٣٠°

أثبت أن : Δ ء حـ و متساوى الساقين.



٢١ في الشكل المقابل :

ء ∈ ب حـ بحيث ء أ = ء ب = ء حـ ، ق(∠حـ) = ٣٠°

أثبت أن :

١ Δ أ ب ء متساوى الأضلاع. ٢ Δ أ ب حـ قائم الزاوية.



٢٢ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، هـ ∈ أب ، هـ ء // أحـ

، ق(∠ب هـ ء) = ٦٠° ، هـ حـ ينصف ∠أ هـ ء

أثبت أن : Δ أ هـ حـ متساوى الأضلاع.



٢٣ في الشكل المقابل :

حـ ∈ ب ء ، ق(∠ب) = ق(∠ء) = ٩٠°

، ق(∠حـ هـ ء) = ٣٠° ، ق(∠أ هـ حـ) = ٤٥°

، ق(∠ب أ حـ) = ٦٠° ، حـ ء = ٣ سم

أوجد : طول أحـ

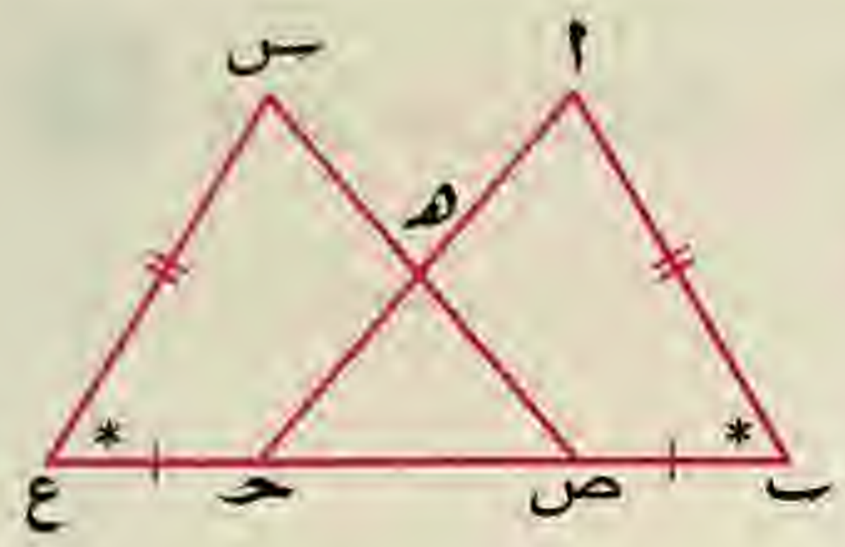




... الشكل المقابل :

... ء ، هـ ، حـ على استقامة واحدة ، ب ء = حـ هـ

... : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

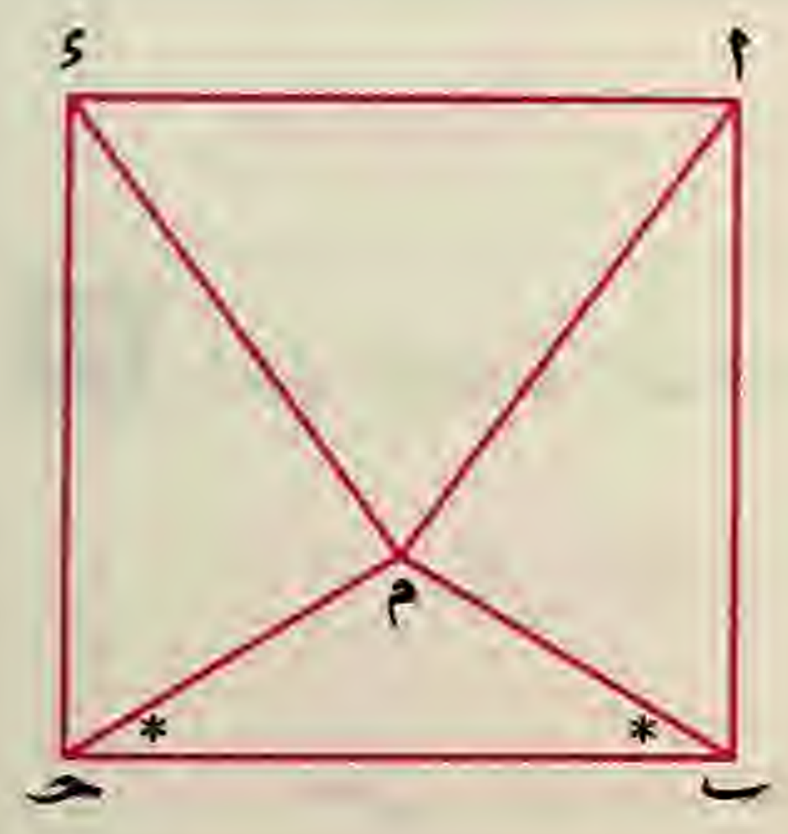


... الشكل المقابل :

... ، حـ ∈ ب ع ، أ ب = س ع ، ب ص = حـ ع

... ∩ أ حـ = {هـ} ، ق (∠ ب) = ق (∠ ع)

... : Δ هـ ص حـ متساوى الساقين.

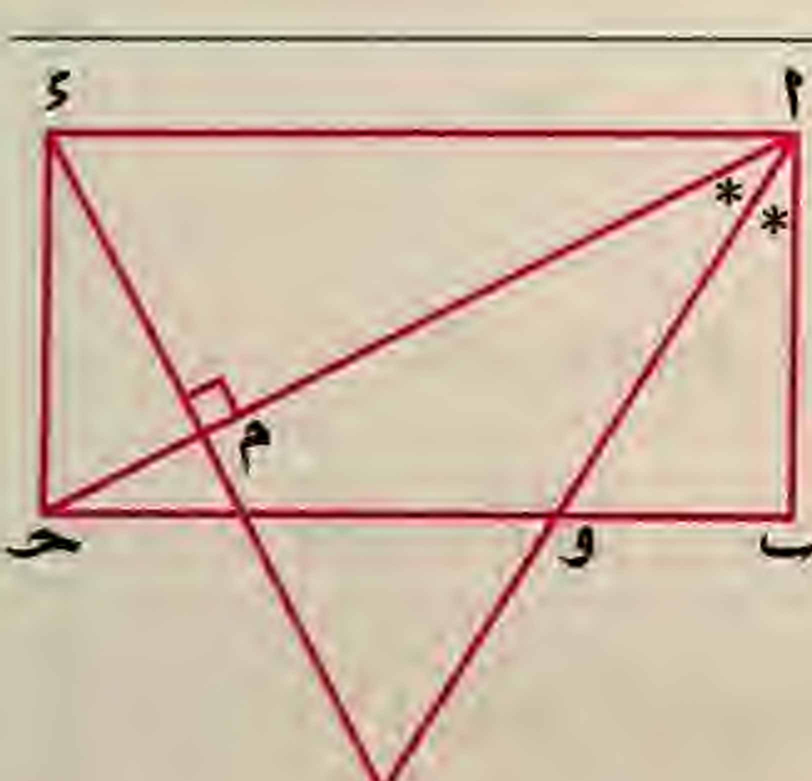


... الشكل المقابل :

... حـ ء مربع ، م نقطة داخله

... ق (∠ م ب حـ) = ق (∠ م حـ ب)

... : Δ أ م ء متساوى الساقين.

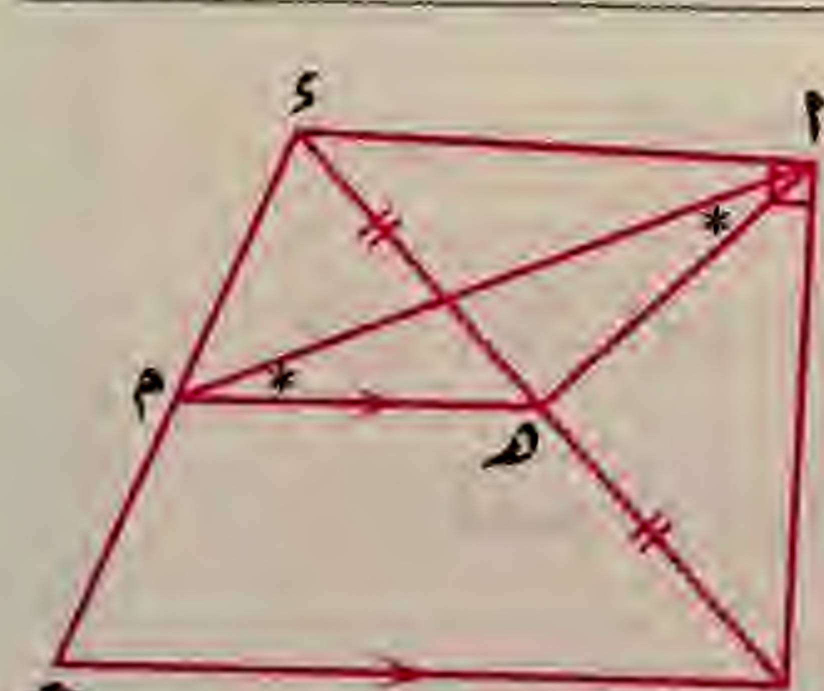


... الشكل المقابل :

... حـ ء مستطيل ، أ حـ قطر فيه ، أ هـ ينصف ∠ ب أ حـ

... ⊥ أ حـ حيث أ هـ ∩ ء هـ = {هـ} ، أ حـ ∩ ء هـ = {م}

... : ء أ = ء هـ



... الشكل المقابل :

... حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ب أ ء) = ٩٠°

... ينصف ب ء ، م ∈ ء حـ بحيث هـ م // ب حـ

... ق (∠ هـ أ م) = ق (∠ هـ م أ) أثبت أن : ب ء = ب حـ

٢٩ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه :

$ق(\angle ب) = ق(\angle حـ)$

أوجد : محيط المثلث. «١٩٠ سم»



٣٠ في كل من الأشكال الآتية اكتب أضلاع المثلث المتساوية في الطول موضحًا خطوات الحل :

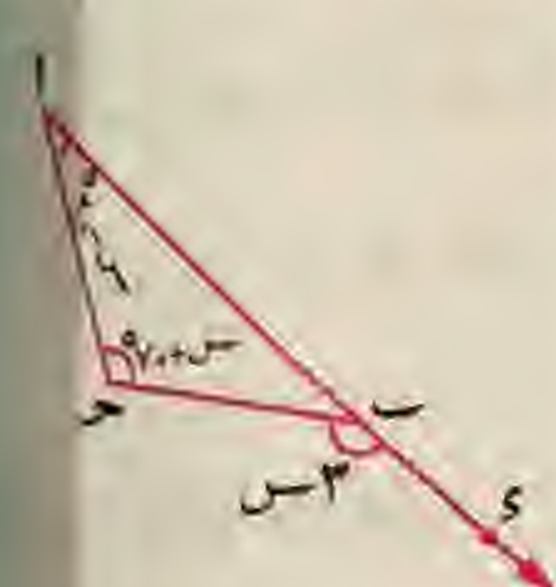
١



٢



٣



٣١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان المثلث أ ب حـ فيه : حـ أ = حـ ب ، $ق(\angle حـ) = ق(\angle أ)$

فإن : $ق(\angle ب) =$ ....

(أ) ٣٠°　(ب) ٦٠°　(جـ) ٩٠°　(د) ١٢٠°

٢ إذا كان مجموع قياسي زاويتين متطابقتين في مثلث $\frac{٢}{٣}$ مجموع قياسات زواياه كان المثلث ....

(أ) قائم الزاوية.　(ب) متساوي الساقين.

(جـ) متساوي الأضلاع.　(د) مختلف الأضلاع.

٣ أ ب حـ مثلث فيه : $ق(\angle أ) = ٣٠°$ ، $ق(\angle ب) : ق(\angle حـ) = ١ : ٤$

فإن : Δ أ ب حـ يكون ....

(أ) قائم الزاوية.　(ب) متساوي الساقين.

(جـ) متساوي الأضلاع.　(د) مختلف الأضلاع.

تطبيق حياتى

...الشكل المقابل :

...تطير فى اتجاه موازى للأرض

...من النقطة ٢ إلى النقطة ٤

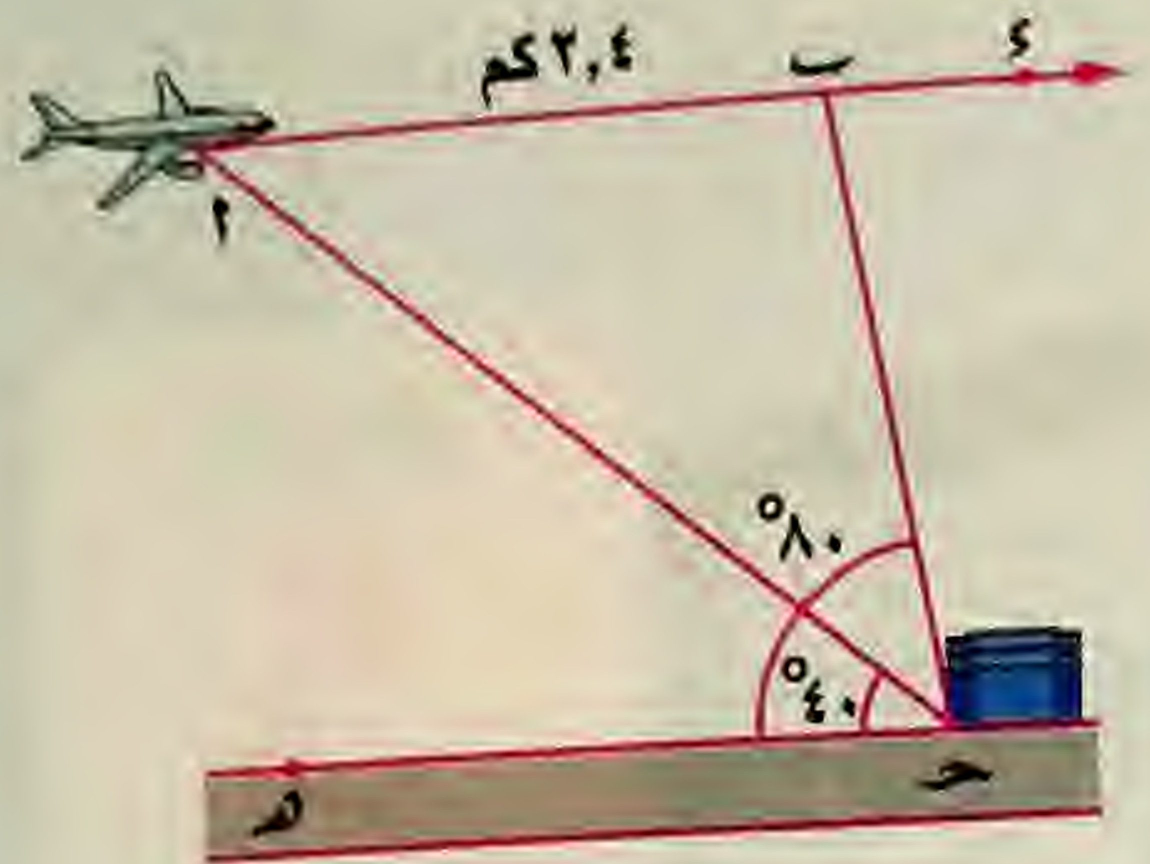
...عندما كانت الطائرة عند نقطة ٢

...جهاز التحكم الأرضى بالمطار فكان

...(∠ ٢ حـ هـ) = ٤٠° وعندما سافرت ٢,٤ كم

...النقطة ب وُجد أن : ق (∠ ب حـ هـ) = ٨٠°

...طول $\overline{\text{ب حـ}}$



«٢,٤ كم»

للمتفوقين

...الشكل المقابل :

...$\overline{\text{ب س}}$ ، ع ∈ $\overline{\text{ص حـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{٢ ع}}$

...س = ب ص = حـ ع ، س ص = ص ع

...(∠ ب ص حـ) = ١٢٠°

...أن : المثلث ٢ ب حـ متطابق الأضلاع.





الدرس

5

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة ١

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس يُنصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : أ ب = أ حـ ، $\overrightarrow{أء}$ متوسط فإن :

١ $\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ   أى أن : ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ أ ء)

٢ $\overrightarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

نتيجة ٢

مُنصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يُنصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه

أ ب = أ حـ ، $\overrightarrow{أء}$ يُنصف ∠ ب أ حـ فإن :

١ ء منتصف $\overline{ب حـ}$ (أى أن : ب ء = حـ ء)

٢ $\overrightarrow{أء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

... رسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة يُنصف كلاً من القاعدة ... الرأس.



... الشكل المقابل :

... ا ب حـ مثلثًا فيه : ا ب = ا حـ ، $\overleftrightarrow{اء} \perp \overline{ب حـ}$ فإن :

... ينصف $\overline{ب حـ}$ (أى أن : ب ء = حـ ء)

... ق (∠ ب ا ء) = ق (∠ حـ ا ء)

... يمكن برهنة النتائج الثلاث السابقة من خلال تطابق المثلثين ا ب ء ، ا حـ ء

... الشكل المقابل :



... ا ب حـ مثلث متساوى الساقين حيث ا ب = ا حـ

... $\overline{ب حـ}$ بحيث $\overline{اء} \perp \overline{ب حـ}$

... ق (∠ حـ ا ء) = ٢٨° ، ب ء = ٣ سم

... : ١ ق (∠ ب ا حـ) ٢ طول $\overline{ب حـ}$

... المعطيات : ا ب = ا حـ ، ق (∠ حـ ا ء) = ٢٨° ، ب ء = ٣ سم ، $\overline{اء} \perp \overline{ب حـ}$

المطلوب : إيجاد : ١ ق (∠ ب ا حـ) ٢ طول $\overline{ب حـ}$

البرهان : فى Δ ا ب حـ :

∵ ا ب = ا حـ ، $\overline{اء} \perp \overline{ب حـ}$

∴ $\overleftrightarrow{اء}$ ينصف كلاً من زاوية الرأس ب ا حـ ، القاعدة $\overline{ب حـ}$

∴ ق (∠ ب ا حـ) = ٢ ق (∠ حـ ا ء) = ٢ × ٢٨° = ٥٦° (المطلوب أولًا)

، ب حـ = ٢ ب ء = ٢ × ٣ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

حاول بنفسك ١

فى الشكل المقابل :



أ ب ء حـ شكل رباعى فيه : أ ب = أ حـ ، ب ء = حـ ء

، أ ء ⊥ ب حـ ، أ ء ∩ ب حـ = {هـ} ، ق(∠ب أ ء) = ٣٠°

، ق(∠ب ء حـ) = ٨٠° ، ب هـ = ٤ سم

أكمل ما يأتى :

١ ق(∠ء أ حـ) = ...°

٢ ق(∠ب ء هـ) = ...°

٣ ق(∠أ حـ ب) = ...°

٤ هـ حـ = ... سم

٥ أ حـ = ... سم

محور تماثل القطعة المستقيمة

تعريف

يسمى المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذه القطعة المستقيمة واختصارًا محور القطعة المستقيمة.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان المستقيم ل ⊥ أ ب ، حـ ∈ المستقيم ل

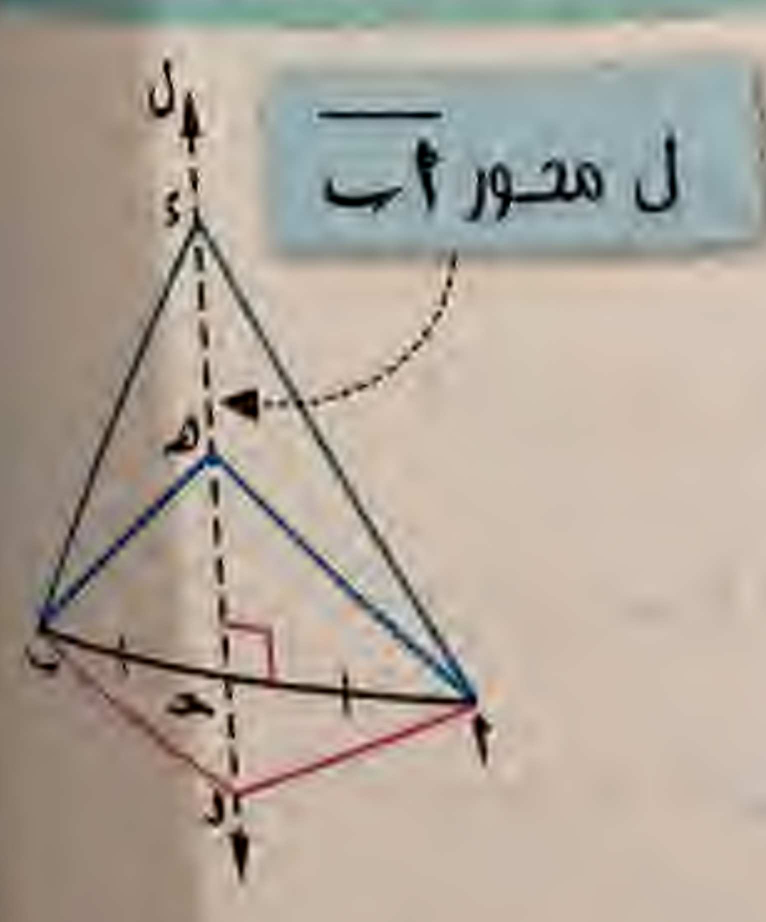
حيث حـ منتصف أ ب

فإن : المستقيم ل محور أ ب

خاصية

أى نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تكون على بُعدين متساويين من طرفيها.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان المستقيم ل محور أ ب

، ء ∈ المستقيم ل ، هـ ∈ المستقيم ل ، و ∈ المستقيم ل

فإن : ء أ = ء ب ، هـ أ = هـ ب ، و أ = و ب

... صحيح أى أنه :

... على بُعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على ... القطعة المستقيمة.



... :

... ما بحيث حـ ا = حـ ب

... تقع على محور $\overline{اب}$



... :

... محور $\overline{اب}$ فإذا كانت النقط حـ ، ء ، هـ

... المستقيم ل ، ل $\cap$ $\overline{اب}$ = {م}

... = ١٢ سم ، ء ب = ٧ سم

... سم ، م ب = ٤ سم

... كل من حـ ب ، ا ء ، هـ ب ، ا م

... المستقيم ل محور $\overline{اب}$ ، حـ ، ء ، هـ تنتمى إلى المستقيم ل ، ل $\cap$ $\overline{اب}$ = {م}

ا حـ = ١٢ سم ، ء ب = ٧ سم ، ا هـ = ٥ سم ، م ب = ٤ سم

... إيجاد : طول كل من $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{ا ء}$ ، $\overline{هـ ب}$ ، $\overline{ا م}$

... حـ ، ء ، هـ تنتمى إلى المستقيم ل محور $\overline{اب}$

∴ حـ ب = حـ ا = ١٣ سم ، ا ء = ء ب = ٧ سم

∴ هـ ب = ا هـ = ٥ سم ، ا م = م ب = ٤ سم

(وهو المطلوب)







مثال ٣

أ ب ح مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ ح ، ب س ينصف ∠ أ ب ح ويقطع أ ح فى س ، ح ص ينصف ∠ أ ح ب ويقطع أ ب فى ص فإذا كان : ب س ∩ ح ص = {م}

فاثبت أن : أ م ⊥ ب ح

الحل

المعطيات	أ ب = أ ح ، ب س ينصف ∠ أ ب ح ، ح ص ينصف ∠ أ ح ب
المطلوب	إثبات أن : أ م ⊥ ب ح
البرهان	∵ أ ب = أ ح

∴ ق (∠ أ ب ح) = ق (∠ أ ح ب) (١)

، ∵ ب س ينصف ∠ أ ب ح

∴ ق (∠ م ب ح) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ب ح) (٢)



وبالمثل : ∵ ح ص ينصف ∠ أ ح ب

∴ ق (∠ م ح ب) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ أ ح ب) (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : ق (∠ م ب ح) = ق (∠ م ح ب)

∴ م ب = م ح أى أن : م على بعدين متساويين من ب ، ح

∴ م ∈ محور ب ح (٤)

، ∵ أ ب = أ ح أى أن : أ على بعدين متساويين من ب ، ح

∴ أ ∈ محور ب ح (٥)

من (٤) ، (٥) : ∴ أ م محور ب ح

∴ أ م ⊥ ب ح (وهو المطلوب)



تماثل المثلث المتساوى الساقين

... متساوى الساقين له محور تماثل واحد هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديًا على قاعدته.

... كان أ ب حـ مثلثًا متساوى الساقين

... = أ حـ ، $\overleftrightarrow{أء} \perp \overline{ب حـ}$

... يسمى محور تماثل للمثلث

... متساوى الساقين.



... ملاحظتان

... المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل وهى الأعمدة المرسومة من رؤوسه الثلاثة على الأضلاع المقابلة لها.

فى الشكل المقابل : المستقيمات $ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$ محاور تماثل للمثلث أ ب حـ المتساوى الأضلاع.

... المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل.



تمارين 5

على نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين



أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتى :

١ المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديًا على القاعدة يُسمى ....

٢ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

٣ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين يساوى ....

٤ عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع يساوى ....

٥ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ....

٦ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ....

٧ المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ....

٨ محور القطعة المستقيمة هو ....

٩ أى نقطة تنتمى لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها.

١٠ إذا كانت حـ تنتمى إلى محور تماثل القطعة $\overline{أب}$ فإن .... = ...

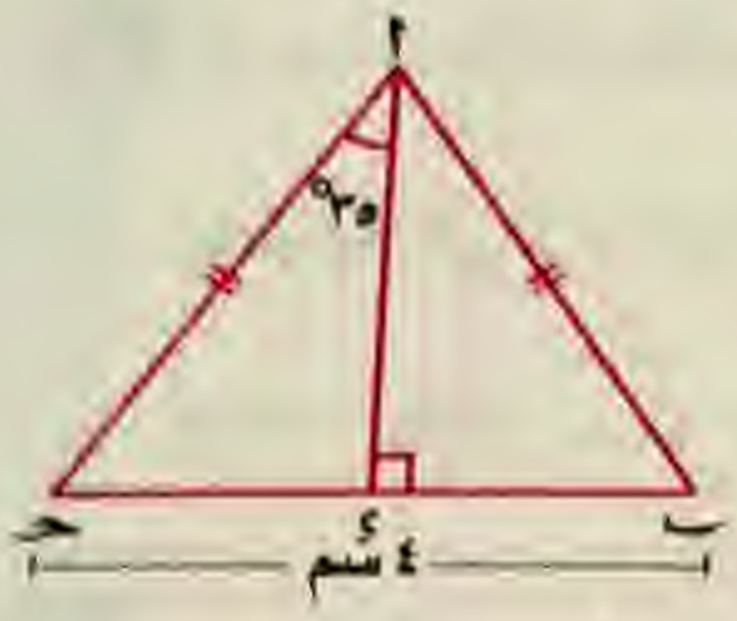
١١ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ٦٠°
فإن : عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

١٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) ≠ ٦٠°
فإن : عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

١٣ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٦٠°
فإن : عدد محاور تماثل Δ أ ب حـ هو ....

١٤ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم هو ٤٥° فإن عدد محاور تماثله هو ....

١٥ إذا كان Δ أ ب حـ له محور تماثل واحد وفيه : ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠°
فإن : ق (∠ أ) = ...°



... الشكل المقابل :

... ب = أ حـ ، أ ء ⊥ ب حـ

... سم ، ق(∠ء أ حـ) = ٣٥°

... أوجد :

... = ...°

[٢] ق(∠ب أ حـ) = ...°

... (ب أ ء) = ...°

[٤] ب ء = ... سم

... محاور تماثل المثلث أ ب حـ هو ....



... الشكل المقابل :

... س ص ل ع شكل رباعي فيه :

... س ص = س ع ، ل ص = ل ع ، س ل ⊥ ص ع

... س ل ∩ ص ع = {هـ} ، ق(∠ص س ل) = ٣٠°

... ق(∠ص ل ع) = ١١٠° ، ص هـ = ٤ سم

... أوجد ما يأتى :

... (∠ل س ع) = ...°

[٢] ق(∠ص ل هـ) = ...°

... (∠س ع ص) = ...°

[٤] هـ ع = ... سم

... س ع = ... سم

[٦] س هـ = ... سم

... عدد محاور تماثل المثلث س ص ع هو ....

... عدد محاور تماثل المثلث ص ل ع هو ....

... مساحة ∆س ص ع تساوى .... سم^2



«٤٠ سم ، ٤٥°»

... الشكل المقابل :

... أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ومتساوى الساقين

... ب ء ⊥ أ حـ ، أ ء = ٢٠ سم

... أوجد طول أ حـ ، ق(∠ء ب حـ)

... ثم برهن أن : ∆ب ء حـ متساوى الساقين.

٥ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ب حـ = ٦ سم ، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ يقطعها فى ء ، ق(∠ب أ ء) = ٢٥°

أوجد : طول $\overline{ب ء}$ ، ق(∠ب)

(٣ سم ، ٦٥°)

٦ فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ على الترتيب

، $\overline{ب هـ} \cap \overline{حـ ء} = \{م\}$

أثبت أن : ١ $\overleftrightarrow{أ م} \perp \overline{ب حـ}$ ٢ $\overleftrightarrow{أ م}$ ينصف ∠ب أ حـ

٧ فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ

، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ ، أ ب = ١٣ سم ، ب ء = ٥ سم

أوجد :

١ طول $\overline{ب حـ}$

٢ مساحة Δ أ ب حـ

(١٠ سم ، ٦٠ سم²)

٨ فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ ، ب حـ = ١٠ سم

، ق(∠ب أ ء) = ٣٠°

، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$

١ أوجد طول كل من : $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أء}$

٢ ما عدد محاور تماثل المثلث أ ب حـ ؟

٣ ما مساحة Δ أ ب حـ ؟

(٥ سم ، ٥ $\sqrt{3}$ سم ، ١ ، ٢٥ $\sqrt{3}$ سم²)

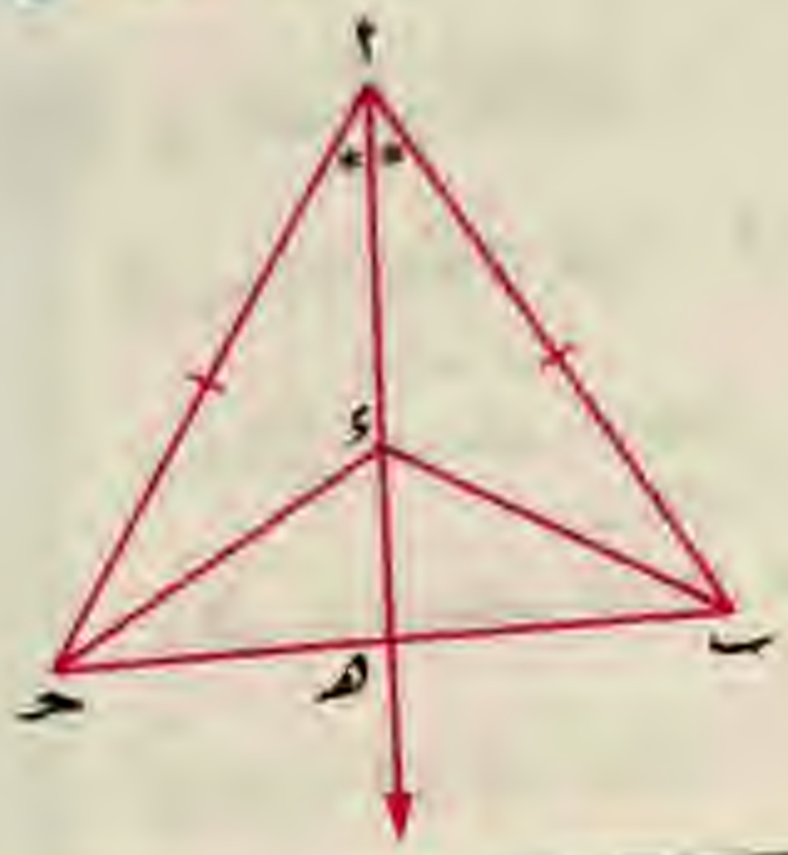
... الشكل المقابل :

... فيه : اب = اح ، اهـ ينصف ∠ ب ا ح

... = {هـ} ، ء ∈ اهـ

ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب ح

[٢] ب ء = ح ء



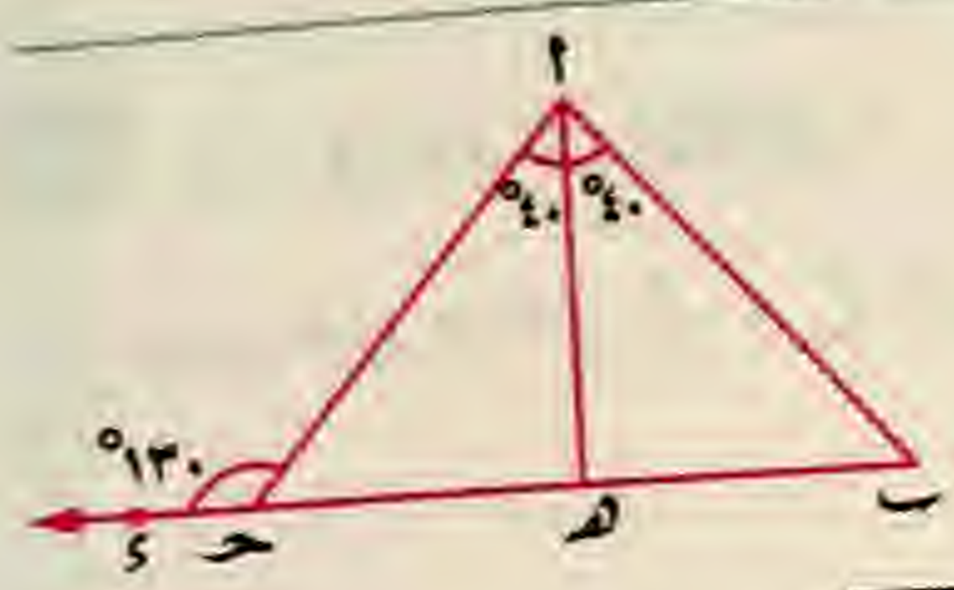
... الشكل المقابل :

... ، ق(∠ ا ح ء) = ١٣٠°

... ق(∠ ب ا هـ) = ق(∠ ح ا هـ) = ٤٠°

[١] اهـ ⊥ ب ح

[٢] هـ منتصف ب ح



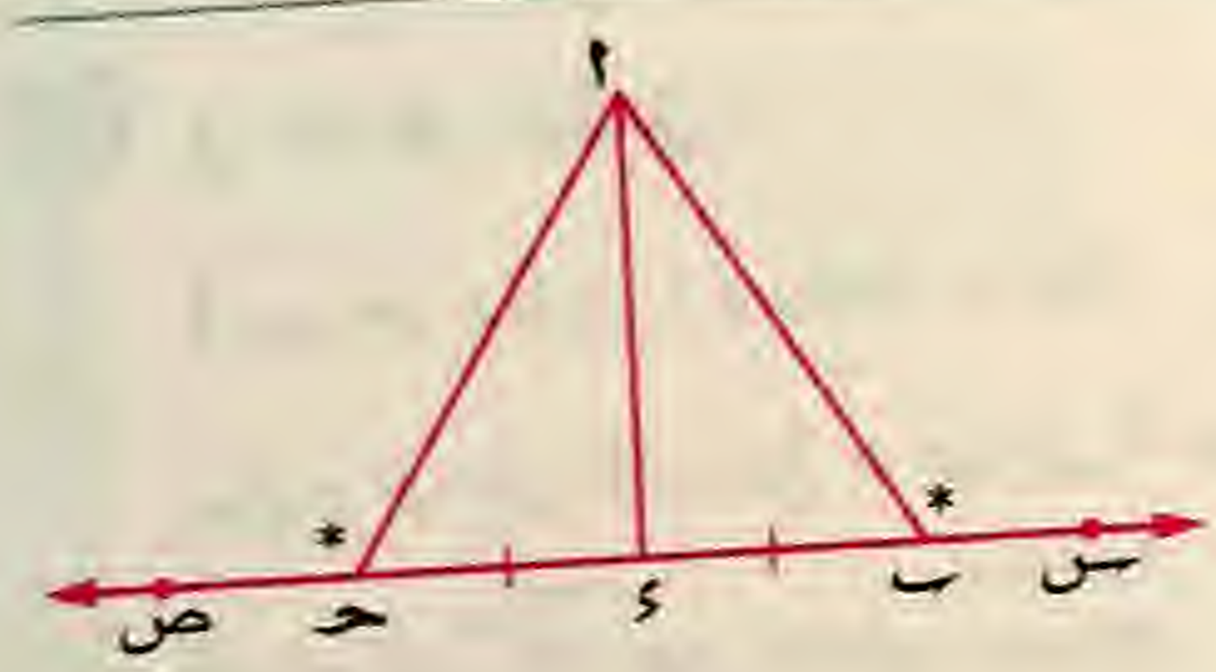
... الشكل المقابل :

... ح ، ص على استقامة واحدة

... في Δ ا ب ح

... س) = ق(∠ ا ح ص)

اء ⊥ ب ح



... الشكل المقابل :

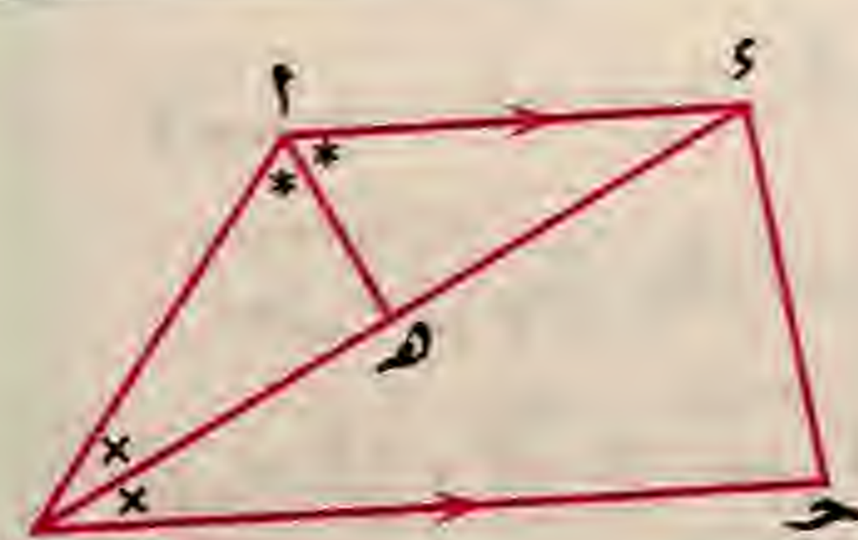
... شكل رباعي فيه : اء // ب ح

... ينصف ∠ ا ب ح ، اهـ ينصف ∠ ب ا ء

[١] اب = اء

[٢] اهـ ⊥ ب ء

[٣] ب هـ = هـ ء



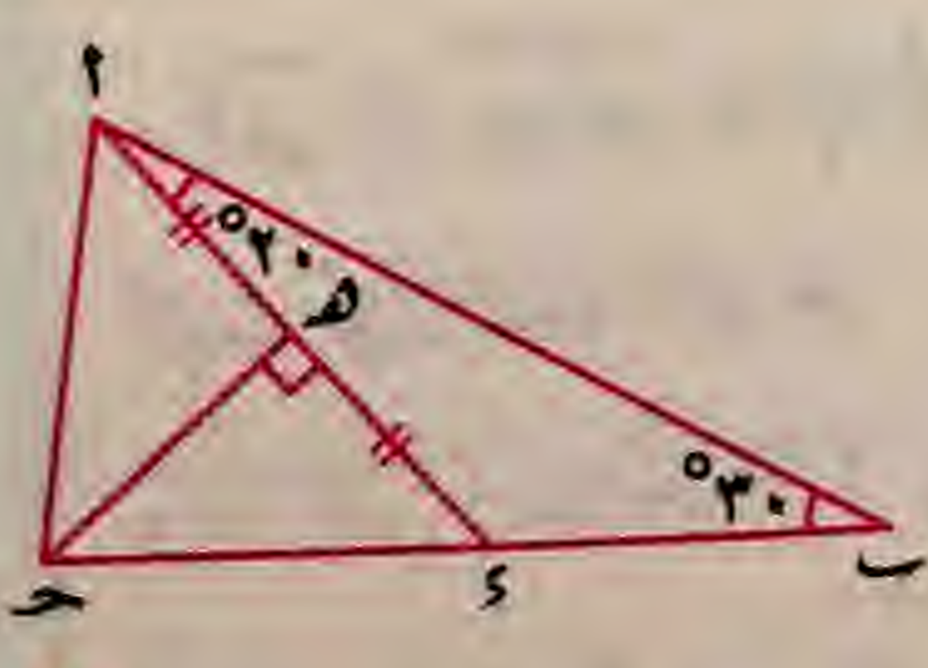
... الشكل المقابل :

... مثلث فيه : ق(∠ ب) = ٣٠°

... بحيث : ق(∠ ب ا ء) = ٢٠°

... منتصف اء ، حـ هـ ⊥ اء

... (∠ ا ح هـ)



« ٤٠° »

... ب ح = ٦ سم ، اء ⊥ ب ح

« ٣٠ سم ، ٦٥° »



... ا ح



« ١٠٠ سم »

« ٦٠٠ سم² »



« ٥٠ سم ، ٥√٣ سم »

« ٢٥٠√٣ سم² »

١٤ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ٧٠°

، ء ∈ ب حـ بحيث : ب ء = أ حـ

، هـ منتصف ء حـ ، أ هـ ⊥ ء حـ

أوجد : ق (∠ ب)



٣٥°

١٥ في الشكل المقابل :

س ص = س ل ، ع ص = ع ل

، ل م = ص م

أثبت أن : س ، م ، ع على استقامة واحدة.



١٦ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء نقطة داخله

بحيث ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ حـ ء) ، أ ب = أ حـ

أثبت أن : أ ء هو محور ب حـ



١٧ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ء منتصف ب حـ

، س ص يمر بالرأس أ بحيث س ص // ب حـ

أثبت أن : أ ء ⊥ س ص



١٨ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ حـ

، أ هـ ∩ ب حـ = {ء}

أثبت أن : ب ء = ء حـ

وإذا كان : ب حـ = ٦ سم

أوجد : طول كل من حـ ء ، أ ء



٣ سم ، $\sqrt{91}$ سم

... في الشكل المقابل :

... ب ء = {م} ، أ ء // ب ح ، م ب = م ح

(١) Δ أ م ء متساوى الساقين.

(٢) محور تماثل Δ أ م ء هو نفسه محور تماثل Δ ب م ح



... في الشكل المقابل :

... أ ح ، ء ∈ أ ب ، هـ ∈ أ ح

... ينصف ∠ ء ب ح ، ح و ينصف ∠ ب ح هـ

(١) Δ ب و ح متساوى الساقين.

(٢) أ و محور تماثل ب ح

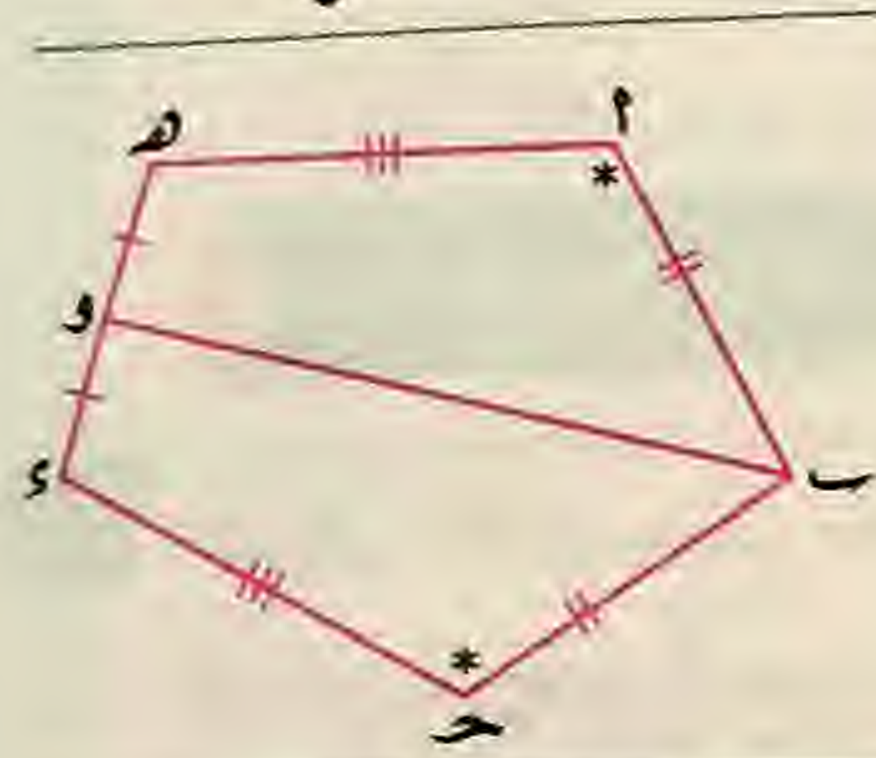


... في الشكل المقابل :

... ب ح ، أ هـ = ح ء

... ق(∠ ب أ هـ) = ق(∠ ب ح ء) ، و منتصف ء هـ

... : ب و ⊥ ء هـ



... في الشكل المقابل :

... شكل رباعى فيه :

... (∠ أ ب ح) = ١٣٠°

... منتصف أ ب ، و منتصف ب ح

... ⊥ أ ب ، ء و ⊥ ب ح

... (∠ أ ء ح)



«١٠٠°»

... الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

... إذا كان أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء ، ب ح = ء ح فإن : أ ح .... ب ء

(أ) يوازى (ب) يساوى (ج) محور تماثل (د) يطابق

... المثلث الذى أطوال أضلاعه ٢ سم ، (س + ٣) سم ، ٥ سم يكون متساوى الساقين ... س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٣ إذا كان طول أي ضلع في مثلث = $\frac{1}{3}$ محيط المثلث ، فإن عدد محاور التماثل للمثلث يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

٤ إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ هو محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ فإن : ....

(أ) أ س = ب ص (ب) أ س = ب س

(جـ) ب ص = س ص (د) أ ص = ب س

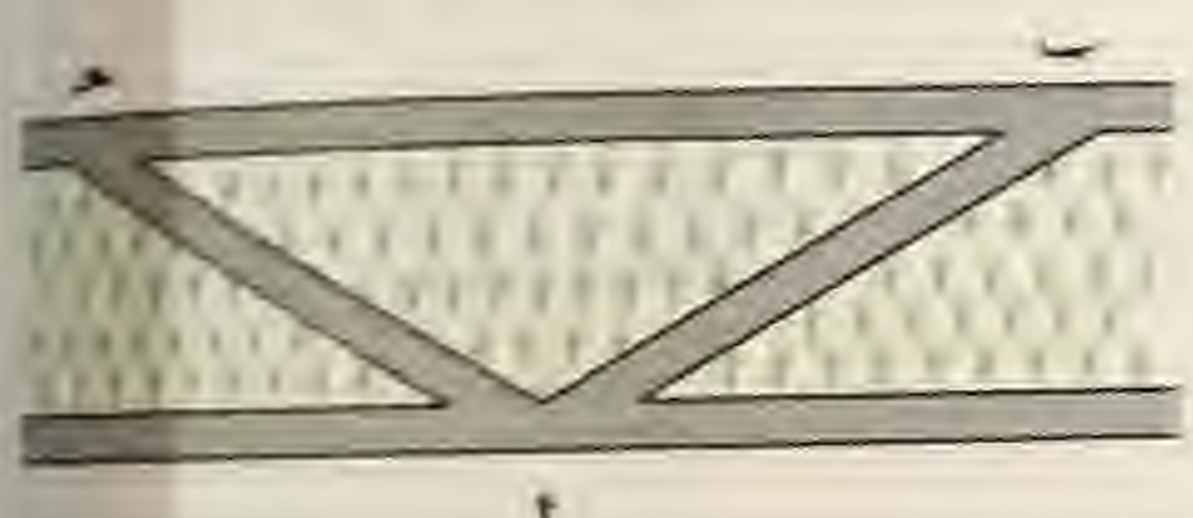
٥ في المعين أ ب حـ ء يكون محور تماثل $\overline{\text{أ حـ}}$ هو ....

(أ) $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

٦ في المربع أ ب حـ ء يكون $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ هو محور تماثل ....

(أ) $\overline{\text{أ ب}}$ (ب) $\overline{\text{أ حـ}}$ (جـ) $\overline{\text{أ ء}}$ (د) $\overline{\text{حـ ء}}$

تطبيق حياتي



٢٤ الشكل المقابل يمثل مخططًا هندسيًا لإنشاء طريقين $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ كل منهما طوله ١ كم في مساحة مزروعة عرضها $\frac{1}{2}$ كم في أحد المتنزهات وذلك بغرض سير الدراجات.

أوجد :

١ قياسات زوايا Δ أ ب حـ (٣٠° ، ١٢٠° ، ٣٠°)

٢ المسافة التي يقطعها راكب دراجة إذا انطلق من نقطة ب وسار حول المثلث أ ب حـ ثم عاد إلى نقطة ب مرة أخرى لأقرب كم (٤ كم تقريبًا)

للمتفوقين



٢٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ شكل خماسي منتظم

، $\overline{\text{أ س}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

أوجد : ق (∠ ء أ س) (١٨°)

ملخص الوحدة الرابعة

Summary

- متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس من رءوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.
- متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة أو بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.
- النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى نقطة تقاطع متوسطات هذا المثلث.
- طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث.
- إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة.
- طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر.
- زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان (أى : متساويتان فى القياس).
- إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقين ويكون المثلث متساوى الساقين.
- إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة ويكون قياس كل منها ٦٠°.
- إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.
- المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون متساوى الأضلاع.
- متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديًا على القاعدة.
- منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديًا عليها.
- المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عموديًا على القاعدة ينصف كلًا من القاعدة وزاوية الرأس.
- محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها.
- أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها.
- إذا كانت هناك نقطة على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور تماثل القطعة المستقيمة.
- المثلث المتساوى الساقين له محور تماثل واحد هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديًا على قاعدته.
- المثلث المتساوى الأضلاع له ثلاثة محاور تماثل.
- المثلث المختلف الأضلاع ليس له محاور تماثل.



امتحانات على الوحدة الرابعة

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : م نقطة تلاقى المتوسطات فى Δ أ ب جـ وكان $\overline{أ ء}$ متوسط طوله ٦ سم فإن : أ م = ...

(أ) ١ سم (ب) ٤ سم (جـ) ٣ سم (د) ٢ سم

٢ إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين يساوى ٤٠° فإن قياس زاوية الرأس يساوى ....

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٣ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٤ إذا كانت : جـ $\in$ محور تماثل $\overline{أ ب}$ فإن : أ جـ − ب جـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ إذا كان : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ب = أ جـ فإن : ق(∠ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٦ عدد متوسطات المثلث المتساوى الساقين = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ أكمل ما يأتى :

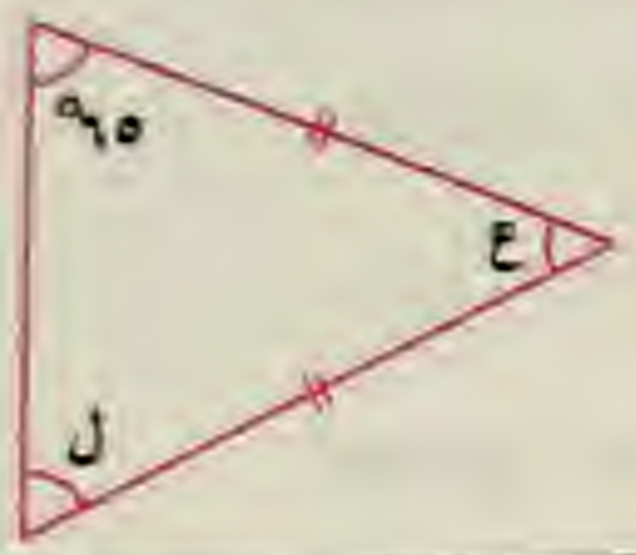
١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : ٢ من جهة الرأس.

٢ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى ....

٣ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس .... ، ....

... إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن ....

... في الشكل المقابل :



ل = ... °

، ع = ... °

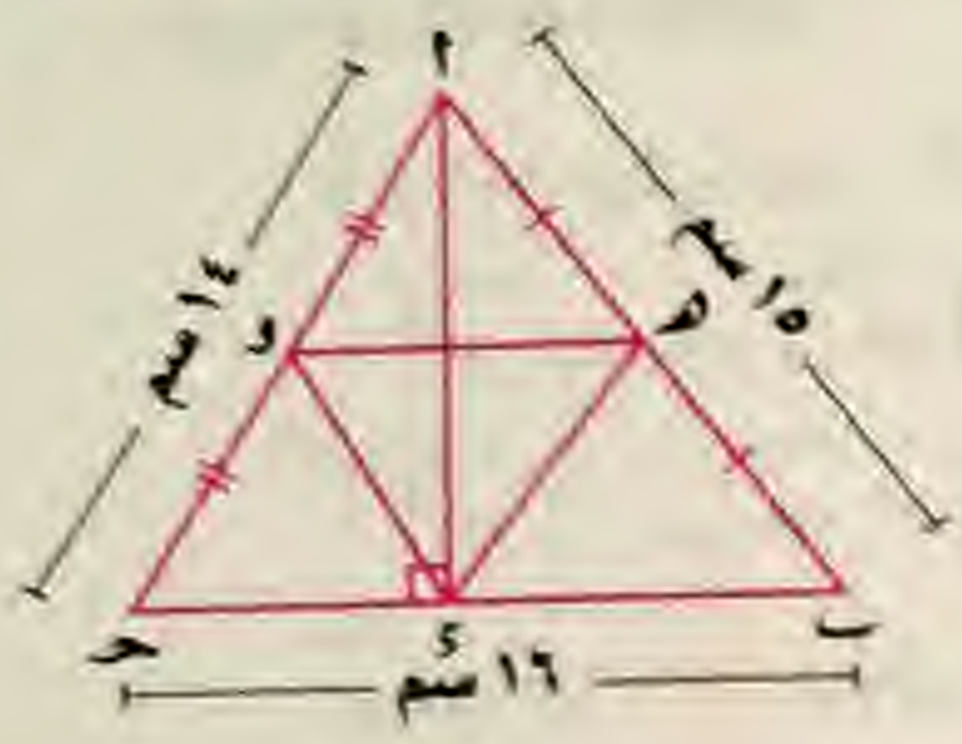
... في الشكل المقابل :

$\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$

، هـ منتصف $\overline{أ ب}$

، و منتصف $\overline{أ حـ}$

أوجد : محيط Δ ء هـ و



... في الشكل المقابل :

ق(∠ب أ هـ) = ق (∠ حـ أ ء)

، أ ب = أ حـ

أثبت أن : أ هـ = أ ء



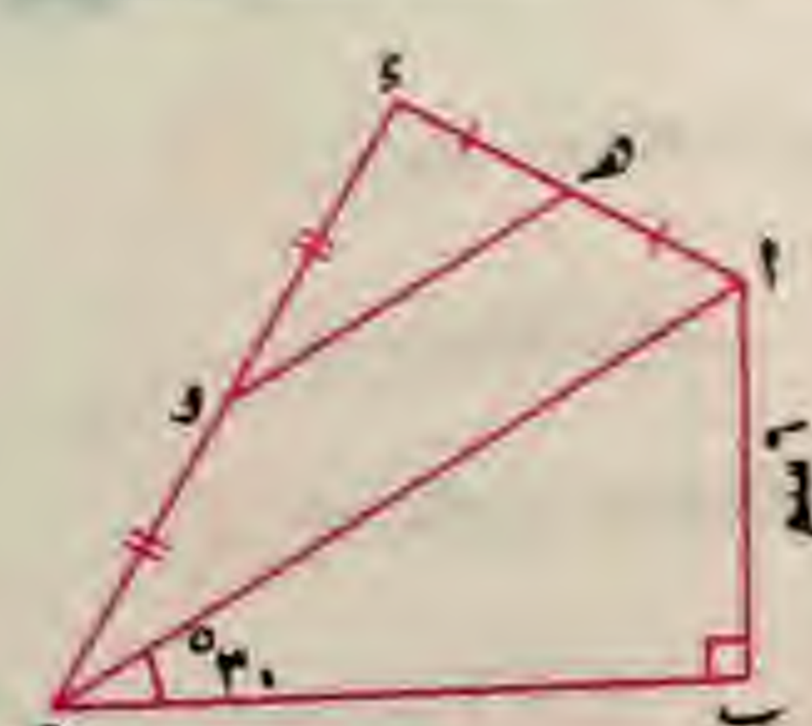
... في الشكل المقابل :

ق(∠ب) = ٩٠° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، أ ب = ٦ سم ، هـ منتصف $\overline{أ ء}$

، و منتصف $\overline{ء حـ}$

أوجد : طول $\overline{هـ و}$



... في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٥٠°

، Δ ب ء هـ متساوى الأضلاع

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ ب ء)





الاول

ة :

Δ أ ب حـ وكان $\overline{أ ء}$ متوسط طوله ٦ سم

(جـ) ٣ سم (د) ٢ سم

لثلث المتساوى الساقين يساوى ٤٠°

(جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

الأضلاع يساوى ....

٩٠° (د) ١٢٠°

حـ - ب حـ = ...

٢ (د) ٣

ب = أ حـ فإن : ق (∠ب) = ...

٦٠° (د) ٩٠°

....

٢ (د) ٣

نسبة .... : ٢ من جهة الرأس.

المثلث القائم الزاوية يساوى ....

الرأس .... ، ....

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



$\overline{بهـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ متوسطان فى Δ أ ب حـ

متقاطعان فى نقطة م ، م هـ = ٣ سم

، م ء = ٤ سم ، ء هـ = ٦ سم

احسب : محيط Δ م ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ

، $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف $\angle$ ب أ حـ

، $\overline{أهـ} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$ ، ء $\in \overline{أهـ}$

برهن أن : **١** ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

٢ ب ء = حـ ء

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) متتامتان. (ب) متكاملتان. (جـ) متطابقتان. (د) مستقيمتان.

٢ إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$ فإن : أ ء = ...

(أ) ٢ أ م (ب) $\frac{2}{3}$ م ء (جـ) $\frac{3}{2}$ أ م (د) ٤ م ء

٣ إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ٥٠° فإن قياس كل من زاويتى القاعدة يساوى ....

(أ) ٤٠° (ب) ٦٥° (جـ) ٧٠° (د) ١٣٠°

٤ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ فإن : ب ء = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ أ حـ (ب) أ حـ (جـ) $\frac{1}{2}$ ب حـ (د) أ ب

... الذى له ثلاثة محاور تماثل يكون ....

(أ) متساوى الساقين. (ب) متساوى الأضلاع.

(ج) قائم الزاوية. (د) منفرج الزاوية.

... ا ب حـ إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق (∠ ا) = ٢ ق (∠ ب)

ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

... يأتى :

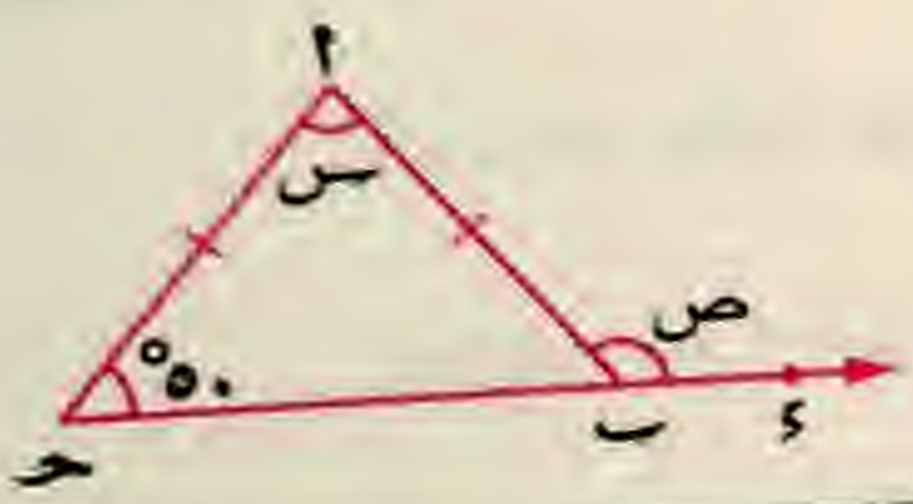
المستقيم المنصف لزاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يكون .... ، ....

النقطة تنتمى لمحور القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها.

... حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ا ب = ٤ سم

... ا حـ = ... سم

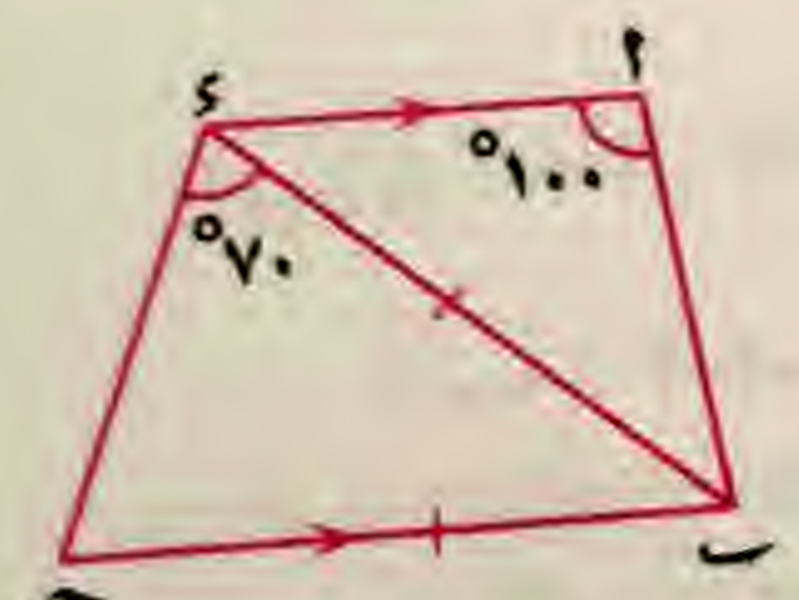
فى الشكل المقابل :



... : ا حـ ، ء ∈ حـ ب

... س = ... ، ص = ...

فى الشكل المقابل :



ا ء // ب حـ ، ب ء = ب حـ

ق (∠ ا) = ١٠٠°

ق (∠ ب ء حـ) = ٧٠°

أثبت أن : Δ ا ب ء متساوى الساقين.

فى الشكل المقابل :



ق (∠ ... حـ) = ٩٠° ، ا و متوسط فى Δ ا ب ء

ق (∠ ب ء حـ) = ٣٠° ، ب حـ = ا و = ٥ سم

أوجد : طول ب ء

أثبت أن : ق (∠ ب ا ء) = ٩٠°





(د) مستقيمتان.

... حـ فإن : ا ء = ...

(د) ٤ م ء

... فإن قياس كل من زاويتى

(د) ١٣٠°

... فإن : ب ء = ...

(د) ا ب

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، أ ء = ء جـ

، ب هـ = هـ جـ

، إذا كان : أ جـ = ١٢ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$

(ب) فى الشكل المقابل :



ع ∈ $\overline{\text{ل ص}}$ ، س ع = ص ع

، ق (∠ ل ع س) = ١٤٠° ، $\overleftarrow{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

أوجد : ق (∠ م ل ص)

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه :

ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

أوجد : محيط المثلث.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ = ١٠ سم ، هـ ب = هـ جـ

، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ∩ $\overline{\text{ب جـ}}$ = {ء}

أثبت أن : ب ء = ء جـ

وإذا كان : ب جـ = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$



مشروع بحثى

الوحدة الرابعة

أهداف المشروع

- استخدام الأدوات الهندسية فى عمل التصميمات الزخرفية.
- استخدام خواص المثلث المتساوى الأضلاع.
- إيجاد مساحة المثلث المتساوى الأضلاع.
- إيجاد مساحة المربع.
- إيجاد مساحة شكل هندسى يتكون من مجموعة من الأشكال الهندسية.
- الربط بين الهندسة والفنون.
- الربط بين الهندسة والعلوم.

تستخدم الهندسة فى العديد من مجالات الحياة منها « التصميمات الهندسية والفنية »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- باستخدام الأدوات الهندسية صمم شعارًا لأحد متاحف الحفريات بحيث يتكون من مربع مرسوم على كل ضلع من أضلاعه من الخارج مثلث متساوى الأضلاع.
- احسب مساحة الشكل الناتج.
- تجميل الشعار بتلوينه بألوان من إبداعك والصق صورة لأحد الحفريات فى المربع.
- نبذة مختصرة عن أنواع الحفريات وكيف تتكون مع ذكر مثال لكل نوع.

الوحدة

5 التبايــــن



دروس الوحدة :

- الدرس 1 : التباين.
- الدرس 2 : المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث.
- الدرس 3 : المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث.
- الدرس 4 : متباينة المثلث.



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

مشروع بحثى على الوحدة الخامسة

... الوحدة :

... هذه الوحدة يجب أن يكون التلميذ قادرًا على أن :

- ... مفهوم التباين.
- ... مسلمات علاقة التباين.
- ... قياسات الزوايا فى المثلث.
- ... العلاقة بين قياسى زاويتين فى مثلث عندما يكون ... المقابلان لهاتين الزاويتين غير متساويين فى الطول.
- ... طول الأضلاع فى المثلث.
- ... العلاقة بين طولى ضلعين فى مثلث عندما تكون الزاويتان ... المقابلتان لهذين الضلعين غير متساويتين فى القياس.
- ... متباينة المثلث.
- ... مسلمات علاقة التباين ومتباينة المثلث فى حل ... فى الهندسة.



يمكنك حل الامتحانات التفاعلية على الدروس من خلال مسح QR code الخاص بكل امتحان

... فى المثلث.

... فى المثلث.



الدرس **1**

التباين

مفهوم التباين

* تعرضنا خلال دراستنا لمجموعات الأعداد إلى علاقة التباين وهى العلاقة التى تستخدم للمقارنة بين عددين مختلفين ونعبر عنها بإحدى العلامتين الآتيتين :

العلامة $>$ وتقرأ ← «أكبر من» (أو) العلامة $<$ وتقرأ ← «أصغر من»

ولما كانت أطوال القطع المستقيمة وكذلك قياسات الزوايا هى عبارة عن أعداد فإننا نستخدم علاقة التباين للمقارنة بين طولى قطعتين مستقيمتين أو قياسى زاويتين.

* فمثلاً فى Δ أ ب جـ :

أ ب < أ جـ



إذا كان : أ جـ = ٥ سم ، أ ب = ٣ سم فإننا نستنتج أن :

طول أ جـ أكبر من طول أ ب ونكتب أ جـ > أ ب

أى، طول أ ب أصغر من طول أ جـ ونكتب أ ب < أ جـ

* وبالمثل فى الشكل د هـ و ل :

ق(∠د) > ق(∠و)



إذا كان : ق(∠د) = ١٤٠° ، ق(∠و) = ٧٥° فإننا نستنتج أن :

ق(∠د) أكبر من ق(∠و) ونكتب ق(∠د) > ق(∠و)

أى، ق(∠و) أصغر من ق(∠د) ونكتب ق(∠و) < ق(∠د)

* وفيما يلى نذكر الطالب بمسلمات علاقة التباين والتى سبق له دراستها.

... علاقة التباين

لأى أربعة أعداد أ ، ب ، حـ ، ء :

... أ > ب	فإن : أ + حـ > ب + حـ
... أ > ب	فإن : أ - حـ > ب - حـ
... أ > ب ، حـ > ٠	فإن : أ حـ > ب حـ
... أ > ب ، ب > حـ	فإن : أ > حـ
... أ > ب ، حـ > ء	فإن : أ + حـ > ب + ء

... المقابل :



... ب ، حـ تنتميان إلى أء بحيث أ ب > حـ ء

... : أ حـ > ب ء

... ب ، حـ تنتميان إلى أء ، أ ب > حـ ء

... إثبات أن : أ حـ > ب ء

∵ أ ب > حـ ء (معطى)   وبإضافة ب حـ للطرفين

∴ أ ب + ب حـ > حـ ء + ب حـ

∴ أ حـ > ب ء   (وهو المطلوب)

... المقابل :



... ق (∠ أ ء ب) > ق (∠ أ ب ء)

... ق (∠ حـ ب ء) > ق (∠ حـ ء ب)

... ق (∠ أ ء حـ) > ق (∠ أ ب حـ)



التباين

... ين وهى العلاقة التى تستخدم للمقارنة ...
... ن :

... علامة < وتقرأ ← « أصغر من »

... هى عبارة عن أعداد فإننا نستخدم ...
... اسى زاويتين.

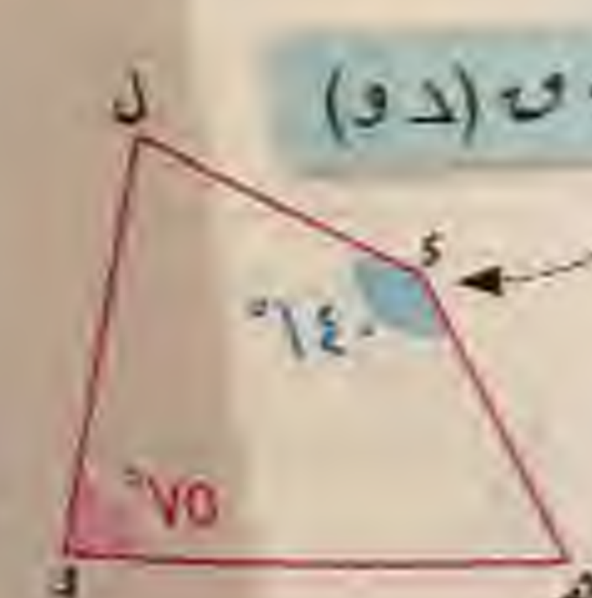
... ب < أ حـ

... ن :



... (∠ ء) > ق (∠ و)

... ج أن :



... راستها.

الحل

المعطيات: ق(∠ ا ء ب) > ق(∠ ا ب ء) ، ق(∠ ح ب ء) < ق(∠ ح ء ب)

المطلوب: إثبات أن: ق(∠ ا ء ح) > ق(∠ ا ب ح)

البرهان: ∵ ق(∠ ح ب ء) < ق(∠ ح ء ب) (معطى)

∴ ق(∠ ح ء ب) > ق(∠ ح ب ء) (١)

، ∵ ق(∠ ا ء ب) > ق(∠ ا ب ء) (معطى) (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ ح ء ب) + ق(∠ ا ء ب) > ق(∠ ح ب ء) + ق(∠ ا ب ء)

∴ ق(∠ ا ء ح) > ق(∠ ا ب ح) (وهو المطلوب)

مثال ٣

فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ ا ب ح) > ق(∠ ا ح ب)

، ب ء = ء ح

فأثبت أن : ق(∠ ا ب ء) > ق(∠ ا ح ء)



الحل

المعطيات: ق(∠ ا ب ح) > ق(∠ ا ح ب) ، ب ء = ء ح

المطلوب: إثبات أن: ق(∠ ا ب ء) > ق(∠ ا ح ء)

البرهان: ∵ ء ب = ء ح

∴ ق(∠ ء ب ح) = ق(∠ ء ح ب) (١)

، ∵ ق(∠ ا ب ح) > ق(∠ ا ح ب) (معطى) (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ق(∠ ا ب حـ) − ق(∠ ء ب حـ) > ق(∠ ا حـ ب) − ق(∠ ء حـ ب)

∴ ق(∠ ا ب ء) > ق(∠ ا حـ ء)

(وهو المطلوب)

نتيجة

قياس أى زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أى زاوية داخلة ما عدا المجاورة لها .

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

ا ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{حـ ب}$

أثبت أن : ق(∠ ا ب هـ) > ق(∠ ا حـ ء)



تمارين 6
على مسلمات علاقة التباين

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل كلاً مما يأتى بوضع علامة > أو < مكان النقط :

١ فى الشكل المقابل :



إذا كانت : حـ ، ب تنتميان إلى $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

بحيث ء حـ < ب أ

فإن : أ حـ .... ء ب

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كانت : ب ، حـ تنتميان إلى $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

بحيث أ ب > حـ ء

فإن : أ حـ .... ب ء

٣ فى الشكل المقابل :



إذا كانت : حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، ق(∠ أ حـ س) = ٣٥°

، ق(∠ ب حـ ص) = ٤٥°

فإن : ق(∠ س حـ ب) .... ق(∠ أ حـ ص)

٤ فى الشكل المقابل :



أ ب = أ ء

، ق(∠ ء ب حـ) < ق(∠ حـ ء ب)

فإن : ق(∠ أ ب حـ) .... ق(∠ أ ء حـ)

٥ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب = أ حـ

، أ ص > أ س

فإن : ب س .... حـ ص

... الشكل المقابل :

... (ل ١) > ق (ل ٣) ، ق (ل ٢) > ق (ل ٤)

... ق (ل أ ب حـ) .... ق (ل أ حـ ب)



... الشكل المقابل :

... كان : أ ب حـ مثلث

... ∈ ب ء ، ص ∈ حـ ء

... ق (ل أ ء ص) .... ق (ل ء أ حـ)

... ق (ل أ ب حـ) .... ق (ل أ ء ص)



... بالشكل المقابل فى ترتيب القياسات المعطاة تصاعديًا

... ب ، حـ ، ء ، هـ

... استقامة واحدة فى ترتيب.



... (ل ١) ، ق (ل ٣) | ٢ ق (ل ٢) ، ق (ل ٤)

... (ل ٥) ، ق (ل ٣) | ٤ ق (ل ٢) ، ق (ل ٦)

... (ل ٣) ، ق (ل ١) ، ق (ل ٥) | ٦ ق (ل ٣) ، ق (ل ٥) ، ق (ل ٧)

... (ل ٢) ، ق (ل ١) ، ق (ل ٧) ، ق (ل ٥)

... الشكل المقابل :

... أ ب ، أ ء ⊥ ب حـ

... منتصف ب حـ

... أن : أ حـ > أ هـ





اختبار تفاعلى

أسئلة كتاب الوزارة

النقط :





= ٢٥°



س)





٤ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$ ، $\overline{أء} \cap \overline{حـب} = \{م\}$

، هـ $\in$ $\overleftrightarrow{حـء}$ ، هـ $\notin$ $\overline{حـء}$

أثبت أن : ١ ق (∠ أحـء) > ق (∠ أبحـ)

٢ ق (∠ أءهـ) > ق (∠ أبحـ)

٥ في الشكل المقابل :



هـ $\in$ $\overleftarrow{حـب}$ ، م منتصف كل من : $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$

أثبت أن : ق (∠ أبهـ) > ق (∠ أحـء)

٦ في الشكل المقابل :



أبحـء متوازى أضلاع ، س $\in$ $\overline{أء}$

، ص $\in$ $\overline{بحـ}$ بحيث ء س < ب ص

أثبت أن : أس + أب > حـ ص + حـء

٧ في الشكل المقابل :



ء $\in$ $\overline{أب}$ حيث أء = أحـ

أثبت أن : ق (∠ أحـب) > ق (∠ ب)

٨ في الشكل المقابل :



أبحـ مثلث فيه : أحـ > أب

، س $\in$ $\overline{أب}$ ، ص $\in$ $\overline{أحـ}$

بحيث ق (∠ أ س ص) = ق (∠ أ ص س)

أثبت أن : ص حـ > س ب

في الشكل المقابل :

أبحـ مثلث فيه :

ء ∈ أحـ ، ء ∈ أب

أثبت أن : ق(∠ أءحـ) > ق(∠ أحـب)



في الشكل المقابل :

ب ∈ ءهـ ، حـ ∈ ءهـ بحيث :

ق(∠ أحـب) > ق(∠ أبحـ)

بس ينصف ∠ أبء ، حـص ينصف ∠ أحـهـ

أثبت أن : ق(∠ أبس) > ق(∠ أحـص)



م نقطة داخل المثلث أبحـ   أثبت أن : ق(∠ أمب) > ق(∠ حـ)

للمتفوقين

في الشكل المقابل :

أبحـ مثلث فيه : ق(∠ ب) > ق(∠ حـ)

ء ∈ بحـ بحيث أء ينصف ∠ بأحـ

أثبت أن : ∠ أءحـ منفرجة.



في الشكل المقابل :

أبحـ مثلث فيه : ق(∠ أحـب) > ق(∠ أبحـ)

ء ∈ بأ بحيث أحـ = أء

أثبت أن : ∠ بحـء منفرجة.





الدرس
2

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

- من دراستنا للوحدة السابقة تعلمنا أنه إذا تطابق ضلعان فى مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متساويتين فى القياس.
- وفيما يلى سوف ندرس العلاقة بين قياسى زاويتين فى مثلث عندما يكون الضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين غير متساويين فى الطول.

نظريـة

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.



المعطيات	أ ب ح مثلث فيه : أ ب > أ ح
المطلوب	إثبات أن : ق (∠ أ ح ب) > ق (∠ أ ب ح)
العمـل	نأخذ نقطة ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ بحيث أ ء = أ ح
البرهـان	فى المثلث أ ح ء :
	∵ أ ء = أ ح ∴ ق (∠ أ ء ح) = ق (∠ أ ح ء) (١)
	، ∵ ∠ أ ء ح خارجة عن المثلث ء ب ح ∴ ق (∠ أ ء ح) > ق (∠ ب) (٢)
	من (١) ، (٢) : ∴ ق (∠ أ ح ء) > ق (∠ ب)
	، ∵ ق (∠ أ ح ب) > ق (∠ أ ح ء)
	∴ ق (∠ أ ح ب) > ق (∠ أ ب ح) (وهو المطلوب)

ملاحظة

أكبر زوايا المثلث فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولاً وقياسها أكبر من ٦٠°

أصغر زوايا المثلث فى القياس تقابل أصغر أضلاع المثلث طولاً وقياسها أقل من ٦٠°

ففى المثلث ا ب حـ

ا ب > ب حـ > ا حـ

ق (د حـ) > ق (د ا) > ق (د ب)

ق (د حـ) > ٦٠° ، ق (د ب) < ٦٠°



... شكل رباعى فيه :

... سم ، ب حـ = ٢ سم ، حـ ء = ٣ سم ، ء ا = ٤ سم

... ق (د ء حـ ب) > ق (د ء ا ب)

... ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ٢ سم ، حـ ء = ٣ سم ، ء ا = ٤ سم

... إثبات أن : ق (د ء حـ ب) > ق (د ء ا ب)



... نرسم $\overline{ا حـ}$

... فى Δ ا حـ ء : ∵ ا ء = ٤ سم ، حـ ء = ٣ سم

∴ ا ء > حـ ء

∴ ق (د ا حـ ء) > ق (د حـ ا ء) (١)

... فى Δ ا ب حـ : ∵ ا ب = ٥ سم ، حـ ب = ٢ سم

∴ ا ب > حـ ب

∴ ق (د ا حـ ب) > ق (د حـ ا ب) (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ق (د ا حـ ء) + ق (د ا حـ ب) > ق (د حـ ا ء) + ق (د حـ ا ب)

∴ ق (د ء حـ ب) > ق (د ء ا ب)

(وهو المطلوب)



الزوايا فى المثلث

... فى مثلث فإن الزاويتين المقابلتين ...

... عندما يكون الضلعان المقابلان ...

... زاوية أكبر فى القياس من ...



... (د ا ء حـ) = ق (د ا حـ ء) (١)

... (د ا ء حـ) > ق (د ب) (٢)

(وهو المطلوب)

مثال ❼

ا ب حـ مثلث فيه : ا ب > ا حـ ، نُصفت زاوية ب ا حـ بالمنصف $\overleftrightarrow{ا ء}$ فقطع $\overline{ب حـ}$ في ء

أثبت أن : المثلث ا ب ء منفرج الزاوية.

الحل



المعطيات	ا ب حـ مثلث فيه : ا ب > ا حـ ، $\overleftrightarrow{ا ء}$ ينصف ∠ ب ا حـ
المطلوب	إثبات أن : Δ ا ب ء منفرج الزاوية.
البرهان	في Δ ا ب حـ : ∵ ا ب > ا حـ ∴ ق (∠ ١) > ق (∠ ٢)

، ∵ $\overleftrightarrow{ا ء}$ ينصف ∠ ب ا حـ   ∴ ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

∴ ق (∠ ١) + ق (∠ ٤) > ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣)

ولكن ق (∠ ١) + ق (∠ ٤) = ق (∠ ٥)

(لأن ∠ ٥ خارجة عن Δ ا ء حـ)

∴ ق (∠ ٥) > ق (∠ ٢) + ق (∠ ٣)

∴ Δ ا ب ء منفرج الزاوية.   (وهو المطلوب)

> **تذكر أن**
> إذا كان قياس زاوية في مثلث أكبر من مجموع قياسي الزاويتين الأخريين فإن هذه الزاوية منفرجة

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : ا ب > ا حـ

ء ، هـ منتصفا $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا حـ}$ على الترتيب.

أثبت أن : ق (∠ ا هـ ء) > ق (∠ ا ء هـ)



اختبر نفسك

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يلى :

١ إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية ....

٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

فإن أصغر زواياه فى القياس هى ....

٣ فى Δ د هـ و إذا كان : د هـ > هـ و فإن : ق (∠ و) > ....

٤ فى أى مثلث أ ب حـ إذا كان : أ ب > أ حـ > ب حـ

فإن : ق (∠ ....) > ق (∠ ....) > ق (∠ ....)

٢ فى كل من الأشكال التالية أكمل باستخدام < أ، > :

١



• ق (∠ ب) ..... ق (∠ ...)

• ق (∠ ...) ..... ق (∠ حـ)

• ق (∠ ...) ..... ق (∠ حـ)

٢



• ق (∠ ع) ..... ق (∠ ص)

• ق (∠ س) ..... ق (∠ ص)

• ق (∠ ع) ..... ق (∠ س)

٣



• ق (∠ ب أ حـ) ..... ق (∠ ب حـ أ)

• ق (∠ د أ حـ) ..... ق (∠ د حـ أ)

• ق (∠ ب أ د) ..... ق (∠ ب حـ د)

٣ رتب قياسات زوايا المثلث أ ب حـ فى كل من الحالتين الآتيتين ترتيبًا تصاعديًا :

١ إذا كان : أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، أ حـ = ١٠ سم

٢ إذا كان : أ ب = ٥,٧ سم ، ب حـ = ٨,٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

٤ في الشكل المقابل :

أ جـ > أ ب

، د ب = د جـ

أثبت أن : ق(∠ أ ب د) > ق(∠ أ جـ د)



٥ في الشكل المقابل :

س ص > س ل

، ص ع > ع ل

برهن أن : ق(∠ س ل ع) > ق(∠ س ص ع)



٦ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د شكل رباعي فيه : أ د = د جـ ، ب جـ > أ ب

برهن أن : ق(∠ أ) > ق(∠ جـ)



٧ أ ب جـ د شكل رباعي فيه : أ ب أكبر الأضلاع طولاً ، جـ د أصغر الأضلاع طولاً.

أثبت أن : ق(∠ ب جـ د) > ق(∠ ب أ د)

٨ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث ، ب م ينصف ∠ أ ب جـ

، جـ م ينصف ∠ أ جـ ب فإذا كان : م جـ > م ب

برهن أن : ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب)



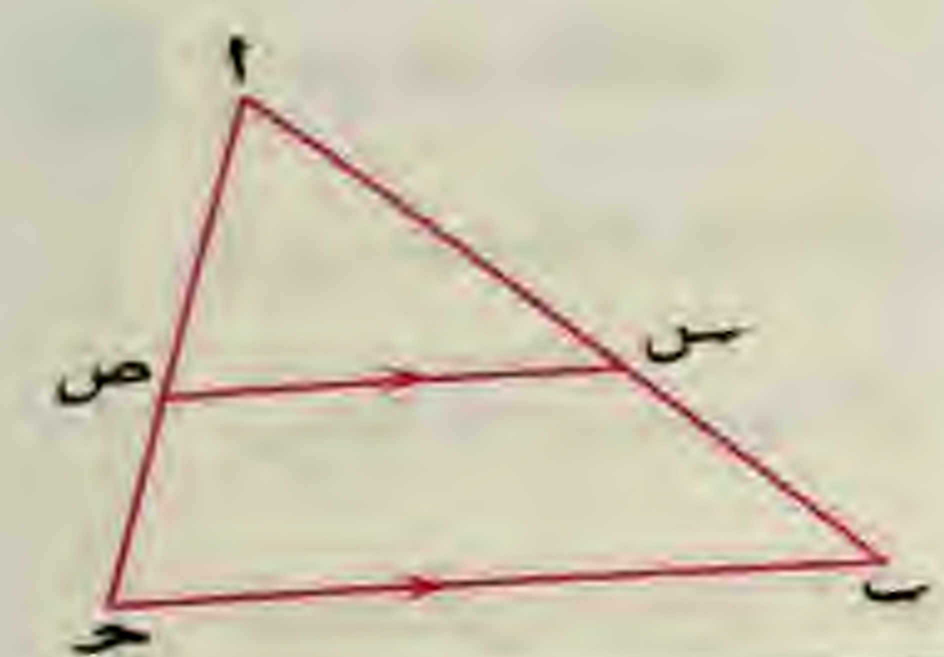
٩ في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ

، د ب > د جـ

أثبت أن : ق(∠ أ ب د) > ق(∠ أ جـ د)





... الشكل المقابل :

... أ ب > أ حـ

... شكل فيه : ...

... س ص // ب حـ

... ق (∠ أ ص س) > ق (∠ أ س ص)



... المقابل :

... شكل فيه : ق (∠ أ) = ٩٠° ، أ ب > أ حـ

... ، هـ ∈ أ حـ ، ء هـ // ب حـ

... ق (∠ أ هـ ء) > ٤٥°



... المقابل :

... شكل فيه : أ ب > أ حـ ، ء ∈ أ ب

... أ حـ بحيث ب ء = حـ هـ

... ق (∠ أ هـ ء) > ق (∠ أ ء هـ)



... المقابل :

... بحيث أ حـ > أ ب

... ق (∠ أ ب ء) > ق (∠ ء)



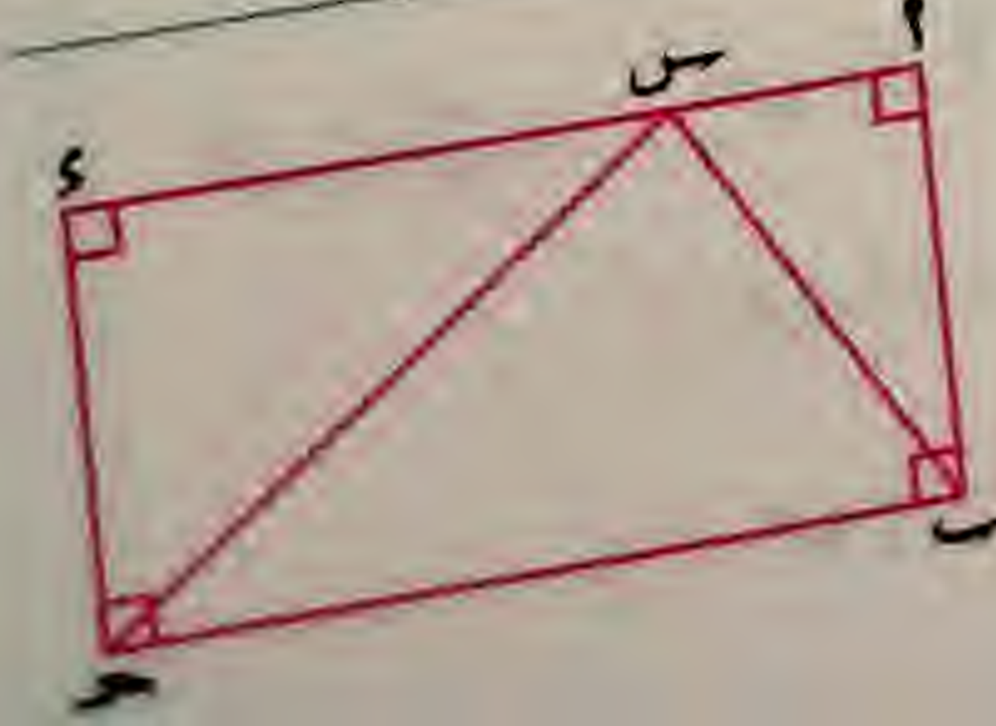
... الشكل المقابل :

... متساوى الأضلاع ، هـ نقطة داخله

... حـ ب) > ق (∠ هـ ب حـ)

... ق (∠ أ ب هـ) > ق (∠ أ حـ هـ)

... ق (∠ أ) > ق (∠ أ ب هـ) > ق (∠ أ حـ هـ)



... المقابل :

... مستطيل ، س ∈ أ ء بحيث س حـ > س ب

... ق (∠ أ س ب) < ق (∠ س حـ ء)







... ولاً ، حـ ء أصغر الأضلاع طولاً.





١٦ في الشكل المقابل :



ا ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٧ سم

، ء ∈ $\overline{اب}$ بحيث ا ء = ٥ سم ، هـ ∈ $\overline{اح}$ بحيث ح هـ = ٤ سم

أثبت أن : ق (∠ ا هـ ء) > ٦٠°

١٧ في الشكل المقابل :



ا ب ح مثلث فيه : ا ب > ا ح

، ء ∈ $\overrightarrow{اب}$ ، هـ ∈ $\overrightarrow{اح}$ ، $\overrightarrow{بو}$ ينصف ∠ ء ب ح

، $\overrightarrow{حو}$ ينصف ∠ ب ح هـ

أثبت أن : ق (∠ و ب ح) > ق (∠ ب ح و)

١٨ ا ب ح مثلث ، ء نقطة داخل المثلث فإذا كان : ء ا > ء ب > ء ح

فأثبت أن : ق (∠ ا ح ب) > ق (∠ ء ا ح) + ق (∠ ء ب ح)

١٩ ا ب ح مثلث ، $\overline{اء}$ ، $\overline{حهـ}$ متوسطان فيه تقاطعا في م فإذا كان : م ء > م هـ

فبرهن أن : ق (∠ ح ا م) < ق (∠ م ح ا)

٢٠ △ ا ب ح فيه : ا ب > ا ح ، ء منتصف $\overline{اب}$ ، رسم $\overrightarrow{ءهـ}$ // $\overline{اح}$ ويقطع $\overline{بح}$ في هـ

برهن أن : ق (∠ ح ا هـ) > ق (∠ ء ا هـ)

٢١ في الشكل المقابل :



ا ب ح ء شكل رباعي فيه : ا ب = ٥ سم

، ب ح = ٤ سم ، ح ء = ٦ سم ، ء ا = ٧ سم

أثبت أن : ١ ق (∠ ا ب ح) > ق (∠ ا ء ح)

٢ ق (∠ ب ح ء) > ق (∠ ب ا ء)

٣ ق (∠ ب) + ق (∠ ح) > ١٨٠°

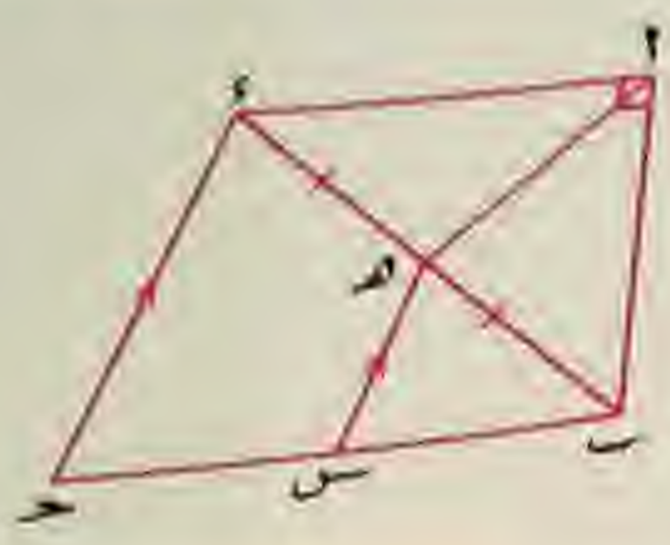
في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : ق (∠ أ) = ٩٠° ،

أهـ متوسط في المثلث أ ب ء ، هـس // ء حـ

، هـس ∩ ب حـ = {س} فإذا كان أهـ > هـس

فأثبت أن : ق (∠ حـ) > ق (∠ ء ب حـ)



في الشكل المقابل :

ب م متوسط في Δ أ ب حـ

، ب م < أ م

برهن أن : ∠ أ ب حـ منفرجة.

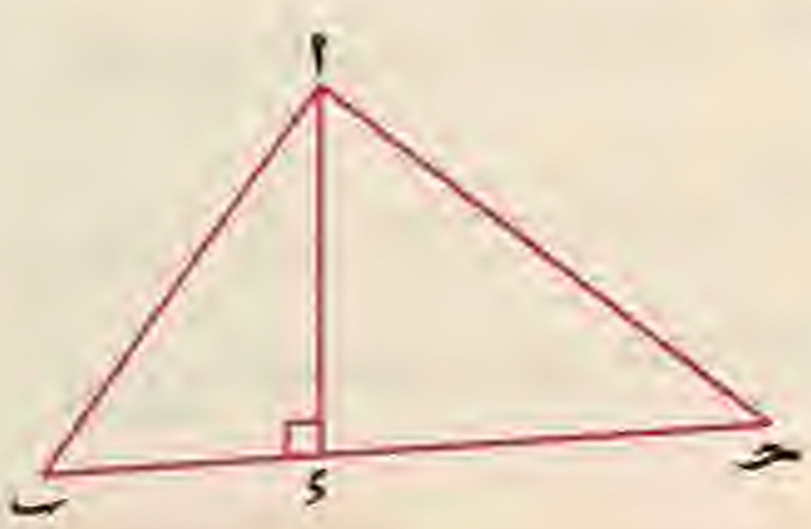


في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ > أ ب

، أ ء ⊥ ب حـ قطعها في ء

برهن أن : ق (∠ ب أ ء) < ق (∠ حـ أ ء)



أ ب حـ مثلث ، أ ء ينصف زاوية أ ويقطع ب حـ في ء فإذا كان أ حـ > أ ب

فبرهن أن : ∠ أ ء حـ منفرجة.

أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ حـ > ب ء **برهن أن :** ∠ ء منفرجة.

للمتفوقين

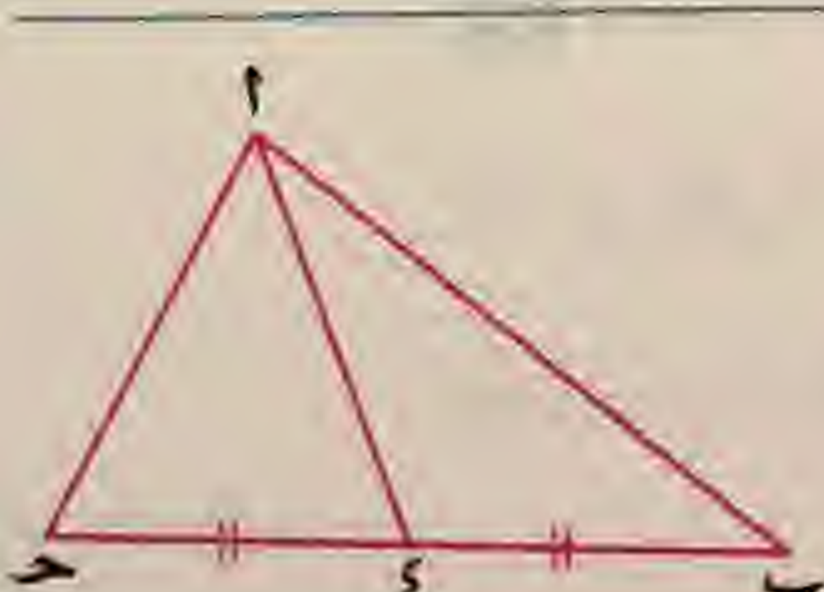
أ ب حـ مثلث ، ء منتصف ب حـ فإذا كان محيط Δ أ حـ ء > محيط Δ أ ب ء

فأثبت أن : ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

في الشكل المقابل :

أ ب > أ حـ ، ء ب = ء حـ

برهن أن : ق (∠ ب أ ء) < ق (∠ حـ أ ء)





الدرس

3

المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

- من دراستنا للوحدة السابقة تعلمنا أنه إذا تساوت زاويتان فى القياس فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متساويين فى الطول.
- وفيما يلى سوف ندرس العلاقة بين طولى ضلعين فى مثلث عندما تكون الزاويتان المقابلتان لهذين الضلعين غير متساويتين فى القياس.

نظريــة

إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى.



المعطيات | Δ أ ب حـ فيه : ق (∠حـ) > ق (∠ب)

المطلوب | إثبات أن : أ ب > أ حـ

البرهــان | ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مستقيمتان.

∴ يجب أن تتحقق إحدى الحالات الآتية :

١ أ ب > أ حـ   ٢ أ ب = أ حـ   ٣ أ ب < أ حـ

إذا لم يكن أ ب > أ حـ

فإما أ ب = أ حـ   أ، أ ب < أ حـ

* إذا كان : أ ب = أ حـ

فإن : ق (∠ حـ) = ق (∠ ب)

وهذا يخالف المعطى حيث : ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)

* وإذا كان : أ ب < أ حـ

فإن : ق (∠ حـ) < ق (∠ ب) حسب النظرية السابقة

وهذا أيضًا يخالف المعطى حيث : ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)

∴ يجب أن يكون : أ ب > أ حـ

(وهو المطلوب)

مثال ١

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

أ ء // ب حـ ، ق (∠ ء أ ب) = ٣٠°

أثبت أن : أ ب > أ حـ



الحل

المعطيات : أ ء // ب حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠° ، ق (∠ ء أ ب) = ٣٠°

المطلوب : إثبات أن : أ ب > أ حـ

البرهان : ∵ أ ء // ب حـ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ ء أ ب) = ٣٠° (بالتبادل)

∴ في Δ أ ب حـ :

ق (∠ حـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°

∴ ق (∠ حـ) > ق (∠ ب)

∴ أ ب > أ حـ

(وهو المطلوب)

نتائج

نتيجة ١

فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث.



ففى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب

فإن : ق (∠ ب) > ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) > ق (∠ حـ)

لأن : ∠ ب قائمة ، وكل من : ∠ أ ، ∠ حـ حادة

وبالتالى يكون : أ حـ > ب حـ ، أ حـ > أ ب (حسب النظرية السابقة)

* لاحظ أنه : فى المثلث المنفرج الزاوية الضلع المقابل للزاوية المنفرجة هو أطول أضلاع المثلث.

نتيجة ٢

طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.



ففى الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ ∉ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

بحيث $\overline{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فإن : $\overline{\text{حـ ب}}$ وتر فى Δ حـ ء ب القائم الزاوية فى ء

، $\overline{\text{حـ أ}}$ وتر فى Δ حـ ء أ القائم الزاوية فى ء ، وهكذا ...

وحسب نتيجة ① يكون : حـ ب > حـ ء ، حـ أ > حـ ء ، وهكذا ...

أى أن : حـ ء < حـ ب ، حـ ء < حـ أ

تعريف

بُعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.

ففى الشكل السابق : بُعد النقطة حـ عن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ هو طول $\overline{\text{حـ ء}}$

مثال ٢

في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : س ، ص ، هـ منتصفات

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب جـ}$ على الترتيب

، ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠°

أثبت أن : ء هـ > س ص



الحل

المعطيات | س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ ء}$ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ، ق(∠ ب ء جـ) = ٩٠°

المطلوب | إثبات أن : ء هـ > س ص

البرهان | في △ أ ب ء : ∵ س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ ء}$

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ ب ء (١)

، في △ ء ب جـ : ∵ ق (∠ ب ء جـ) = ٩٠° ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ (٢)

، ∵ $\overline{ب جـ}$ وتر المثلث ب ء جـ ∴ ب جـ > ب ء

∴ $\frac{١}{٢}$ ب جـ > $\frac{١}{٢}$ ب ء (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ء هـ > س ص (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

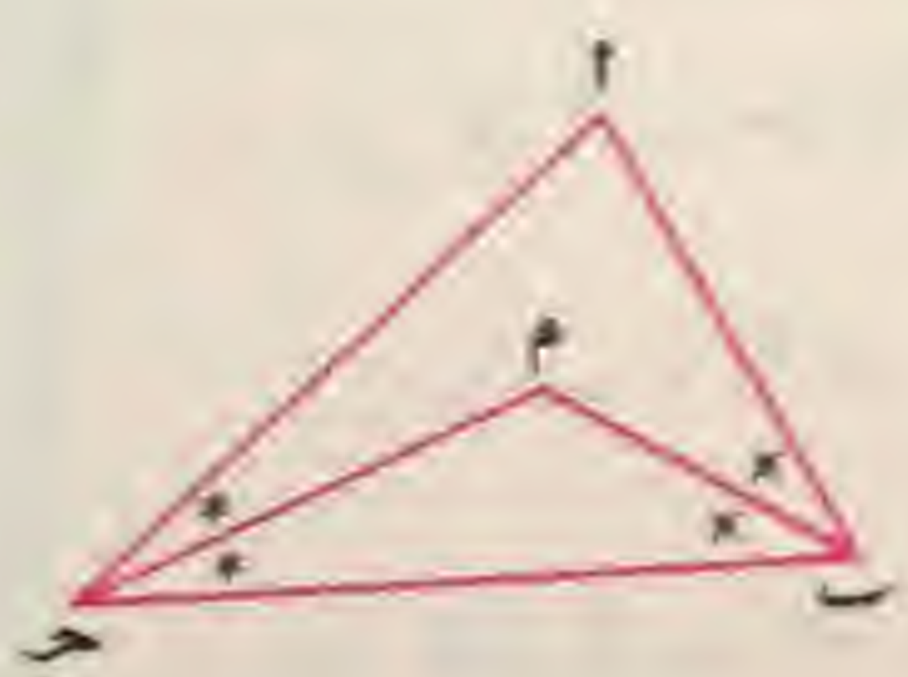
في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ جـ > أ ب

، $\overrightarrow{ب م}$ ينصف ∠ أ ب جـ

، $\overrightarrow{جـ م}$ ينصف ∠ أ جـ ب

أثبت أن : م جـ > م ب



[illegible]



تمارين 8

على المقارنة بين أطوال الأضلاع في المثلث

أسئلة كتاب الوزارة

١ أكمل ما يأتي :

١ إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع .... وإذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية ....

٢ أصغر زوايا المثلث قياسًا يقابلها ....

٣ أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو ....

٤ أقصر بُعد بين نقطة معلومة ومستقيم معلوم هو ....

٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ حـ) = ١١٠° يكون أكبر أضلاعه طولاً هو ....

٦ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٣٠° فإن أصغر أضلاع المثلث طولاً هو ....

٧ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) فإن أكبر الأضلاع طولاً هو ....

٢ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ في △ أ ب حـ إذا كان ق (∠ ب) > ق (∠ حـ) فإن : ....

(أ) أ ب > أ حـ (ب) ب حـ > أ حـ (جـ) أ حـ > أ ب (د) أ ب > ب حـ

٢ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° فإن : ....

(أ) أ حـ > حـ ب (ب) أ ب > أ حـ (جـ) ب حـ > أ حـ (د) أ ب = أ حـ

٣ إذا كان أ ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠° فإن : ....

(أ) أ ب > أ حـ (ب) أ ب < أ حـ (جـ) $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ (د) أ ب = أ حـ

في كل من الأشكال التالية أكمل باستخدام < أ، > :

(١)



أب .... أحـ

أب .... بحـ

أحـ .... بحـ

(٢)



س ص .... س ع

ص ع .... س ص

ص ع .... س ع

(٣)



أحـ .... بحـ

بحـ .... د ب

أحـ .... ب د

أد .... د حـ

(٤)



بحـ .... أب

حـ د .... أحـ

أد .... أهـ

حـ د .... أد

△ س ص ع فيه : ق (∠ س) = ٤٥° ، ق (∠ ص) = ٨٥° ، ق (∠ ع) = ٥٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.

△ أب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥°

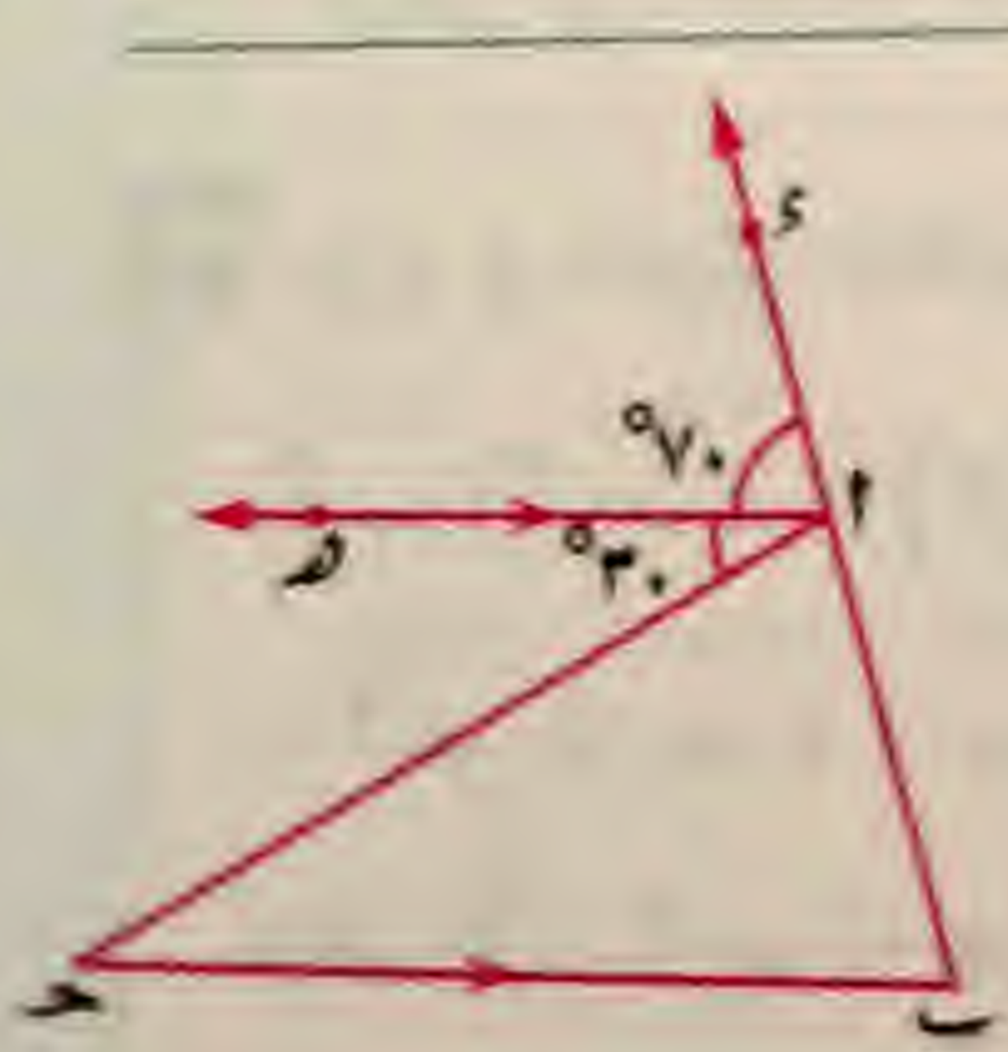
رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

في الشكل المقابل :

أهـ // بحـ ، ق (∠ د أ هـ) = ٧٠°

ق (∠ هـ أ حـ) = ٣٠°

أثبت أن : أحـ > أب



٧ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء ∈ حـ ب ، هـ ∈ أ حـ

، ق (∠ أ ب ء) = ١١٠° ، ق (∠ ب حـ هـ) = ١٢٠°

برهن أن : أ ب > ب حـ



٨ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ

، ق (∠ أ ب حـ) = ٦٥° ، ق (∠ أ حـ ء) = ٢٠°

، أ ∈ ب ء

برهن أن : أ ب > أ ء



٩ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، حـ ء ينصف ∠ حـ ويقطع أ ب في ء

، ق (∠ ب ء حـ) = ١٠٠° ، ء ب = ء حـ

برهن أن : أ حـ > ء ب



١٠ في الشكل المقابل :

أ ء // ب حـ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠°

، ق (∠ ء أ حـ) = ٣٠°

برهن أن : ب حـ > أ ب



١١ في الشكل المقابل :

أ ب ∩ حـ ء = {م}

، أ حـ ⊥ حـ ء ، ب ء ⊥ حـ ء

برهن أن : أ ب > حـ ء



في الشكل المقابل :

اب حـ مثلث فيه ٢ اب = ٢ احـ ، م نقطة داخله

بحيث ق (∠ ٢ ب م) > ق (∠ ٢ حـ م)

اثبت أن : م حـ > م ب



في الشكل المقابل :

اب حـ مثلث منفرج الزاوية في ب

، ءهـ // ب حـ

برهن أن : ٢ هـ > ٢ ء



في الشكل المقابل :

اب > احـ ، ءهـ // ب حـ

، ء حـ ∩ ب هـ = {٢}

اثبت أن : ٢ هـ > ٢ ء



في الشكل المقابل :

اب حـ ء شكل رباعي ، ٢ ب = ٢ ء

، ق (∠ ء) > ق (∠ ب)

برهن أن : ب حـ > حـ ء



في الشكل المقابل :

∆ اب حـ فيه : اب > احـ ، ء ∈ اب ، هـ ∈ احـ

، ب و ينصف ∠ ء ب حـ ، حـ و ينصف ∠ ب حـ هـ

، ب و ∩ حـ و = {و}

برهن أن : [١] ق (∠ و ب حـ) > ق (∠ ب حـ و)

[٢] حـ و > ب و



في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ء ب) = ١١٠°

، ق (∠ حـ) = ٦٠°

أثبت أن : أ ب + أ حـ > ٢ أ ء



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب

أثبت أن : أ ب + ب حـ < ٢ أ حـ

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، $\overleftrightarrow{حـ هـ}$ // $\overline{أ ء}$ ويقطع $\overleftrightarrow{ب أ}$ في هـ

أثبت أن : ب هـ > ب حـ

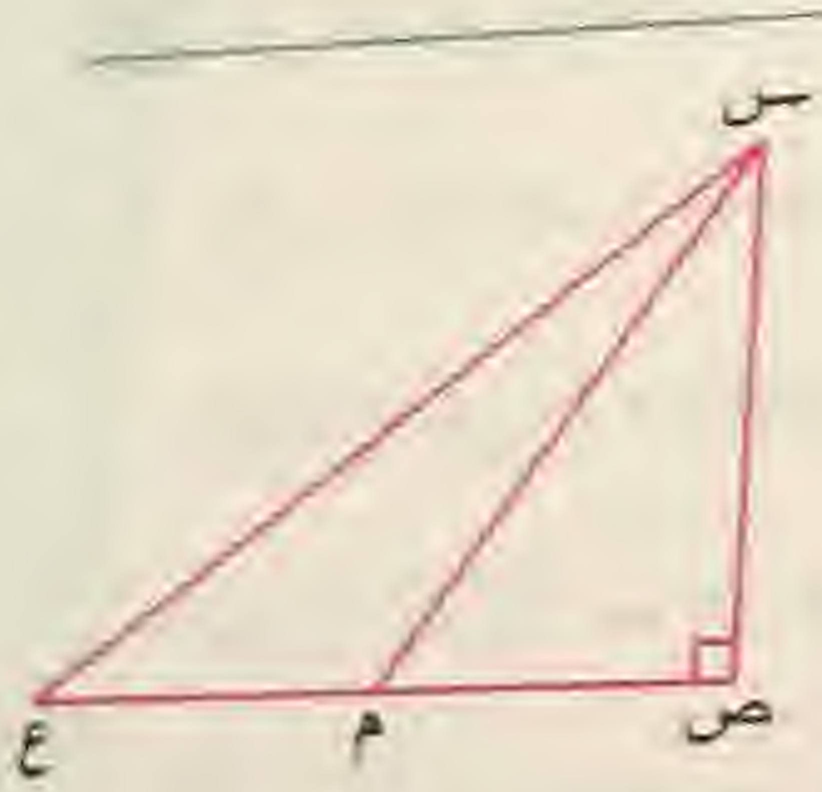


في الشكل المقابل :

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص

، م ∈ $\overline{ص ع}$

أثبت أن : س ع > س م



في الشكل المقابل :

ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، $\overline{ب ء}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

، أ ب > ب حـ

أثبت أن : أ ء > ب ء



أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ينصف ∠ حـ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = {ء}

برهن أن : ب حـ > ب ء

٢٨ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ء ∈ $\overline{أحـ}$ ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ بحيث أء = [illegible]

أثبت أن : ق(∠حـ هـ ء) > ق(∠حـ ء هـ)

٢٩ أ ب حـ مثلث فيه : أب = أحـ ، س ∈ $\overline{أحـ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{س ص}$ يقطع $\overline{أب}$ في ص [illegible]

ويقطع $\overrightarrow{حـ ب}$ في ع

برهن أن : أص > أس

٣٠ Δ أ ب حـ فيه : ق(∠أ) = (٥ س + ٢)° ، ق(∠ب) = (٦ س − ١٠)°

، ق(∠حـ) = (س + ٢٠)°

رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعديًا.

للمتفوقين

٣١ في الشكل المقابل :

أب < أحـ ، ونُصفت الزاويتان ب ، حـ بمنصفين

تقاطعا في م ، وقطع $\overrightarrow{ب م}$ ، $\overrightarrow{حـ م}$ المستقيم المرسوم

من أ موازيًا $\overline{ب حـ}$ في س ، ص على الترتيب.

أثبت أن : ب س < حـ ص





الدرس
4

متباينة المثلث

نعلم أن أصغر مسافة بين نقطتين هي طول القطعة المستقيمة المرسومة بين هاتين النقطتين.



فمثلاً في الشكل المقابل :

أصغر مسافة بين نقطة أ ، ونقطة ب هي طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$

فإذا كانت نقطة جـ $\notin$ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

فإن : أ ب < أ جـ + جـ ب

وبصفة عامة

في أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.

- أى أنه : في أى مثلث أ ب جـ



يكون : أ ب + ب جـ > أ جـ

، ب جـ + جـ أ > أ ب

، جـ أ + أ ب > ب جـ

نتيجة

طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما.

ويمكن إثبات ذلك كما يلى :

فى الشكل المقابل ا ب حـ مثلث



ومن متباينة المثلث يكون :

ا حـ + ا ب > ب حـ (١)

، ∵ ا ب + ب حـ > ا حـ

أى أن : ب حـ > ا حـ − ا ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : **ا حـ − ا ب < ب حـ < ا حـ + ا ب**

ملاحظة

لتحديد ما إذا كانت ثلاثة أطوال تصلح لأن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث نتبع الآتى :

نقارن بين الطول الأكبر ، ومجموع الطولين الآخرين :

- إذا كان الطول الأكبر أكبر من أو يساوى مجموع الطولين الآخرين فإن هذه الأطوال الثلاثة **لا تصلح** أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

وفى هذه الحالة لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه هى الأطوال الثلاثة المعطاة.

- إذا كان الطول الأكبر أصغر من مجموع الطولين الآخرين فإن هذه الأطوال الثلاثة **تصلح** أن تكون أطوالًا لأضلاع مثلث.

وفى هذه الحالة يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه هى الأطوال الثلاثة المعطاة.

مثال ١

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يلى مع ذكر السبب ؟

١ ٥ سم ، ٧ سم ، ١٢ سم

٢ ٤ سم ، ٦ سم ، ١١ سم

٣ ١٤ سم ، ٩ سم ، ٧ سم

٤ ٨ سم ، ١٨ سم ، ٨ سم

الحـــل

١ ∵ ٥ + ٧ = ١٢ ∴ لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٧ سم ، ١٢ سم

٢ ∵ ٤ + ٦ < ١١ ∴ لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٤ سم ، ٦ سم ، ١١ سم

٣ ∵ ٩ + ٧ > ١٤ ∴ يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ١٤ سم ، ٩ سم ، ٧ سم

٤ ∵ ٨ + ٨ < ١٨ ∴ لا يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه ٨ سم ، ١٨ سم ، ٨ سم

مثال ٢

أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

١ ٤ سم ، ٣ سم

٢ ٤,٥ سم ، ٧,٥ سم

٣ ٢√٥ سم ، ٢√٥ سم

الحـــل

∵ طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما

وبفرض أن طول الضلع الثالث = ل سم فإن :

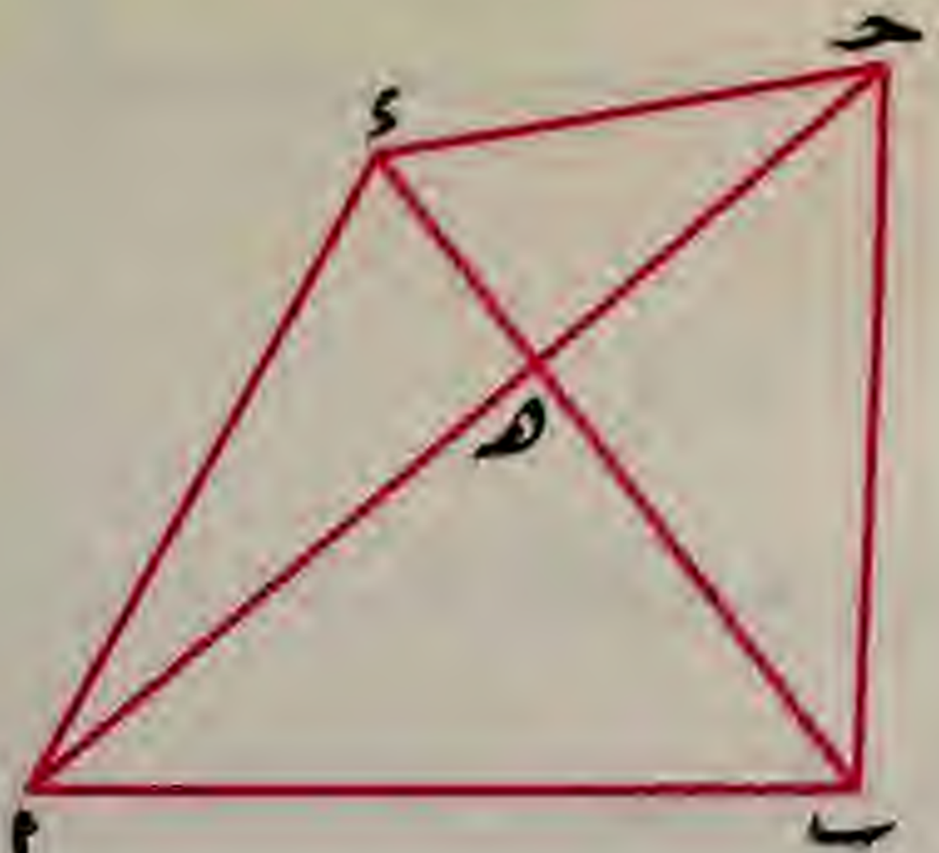
١ ٤ − ٣ < ل < ٤ + ٣ ∴ ١ < ل < ٧ ∴ ل ∈]١ ، ٧[

٢ ٧,٥ − ٤,٥ < ل < ٧,٥ + ٤,٥ ∴ ٣ < ل < ١٢ ∴ ل ∈]٣ ، ١٢[

٣ ٢√٥ − ٢√٥ < ل < ٢√٥ + ٢√٥ ∴ صفر < ل < ٤√٥

∴ ل ∈]صفر ، ٤√٥[

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ

أثبت أن : أ حـ + ب ء > ب حـ + أ ء

الحـل

المعطيات ا ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ

المطلوب إثبات أن : ا حـ + ب ء > ب حـ + ا ء

البرهان فى △ هـ ب حـ : هـ حـ + هـ ب > ب حـ (متباينة المثلث) (١)

، فى △ هـ ا ء : هـ ا + هـ ء > ا ء (متباينة المثلث) (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ هـ حـ + هـ ا + هـ ب + هـ ء > ب حـ + ا ء

، ∵ هـ حـ + هـ ا = ا حـ ، ∵ هـ ب + هـ ء = ب ء

∴ ا حـ + ب ء > ب حـ + ا ء (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

١ ضع علامة (✓) فى المكان الخالى أمام كل مجموعة أطوال تصلح لأن تكون أطوال أضلاع مثلث :

١) ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم ☐

٢) ٣ سم ، ٦ سم ، ٢ سم ☐

٣) ١٠ سم ، ٣ سم ، ٧ سم ☐

٤) ١٢ سم ، ٥ سم ، ٧,٥ سم ☐

٢ أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث فى كل من المثلثين الآتيين إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

١) ٦ سم ، ٥ سم

٢) ٧,٥ سم ، ٧,٥ سم

]١ ، ١١[(١) ⑧]٠ ، ١٥[(٨)

(٣) ، (١) ①



تمارين 9

على متباينة المثلث

اختبر نفسك

أسئلة كتاب الوزارة

١ هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يلى مع ذكر السبب :

١ ٣ سم ، ٤ سم ، ٩ سم
٢ ٥ سم ، ٧ سم ، ٨ سم
٣ ١٠ سم ، ٦ سم ، ٤ سم
٤ ١٣ سم ، ٨ سم ، ٦ سم
٥ ٥ سم ، ٣ سم ، ٤ سم
٦ ٩ سم ، ٩ سم ، ١٩ سم

٢ أوجد الفترة التى ينتمى إليها طول الضلع الثالث لكل من المثلثات التالية إذا كان طولا الضلعين الآخرين هما :

١ ٦ سم ، ٩ سم
٢ ٣ سم ، ٣ سم
٣ ٢,٩ سم ، ٣,٢ سم
٤ ٥,٧ سم ، ٧,٣ سم

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أصغر من (ب) أكبر من (جـ) يساوى (د) نصف

٢ طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

٣ أى من الأعداد الآتية لا تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث ؟

(أ) ٧ ، ٧ ، ٥ (ب) ٩ ، ٩ ، ٩
(جـ) ٣ ، ٦ ، ١٢ (د) ٣ ، ٤ ، ٥

٤ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٧ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون ....

(أ) ١ سم (ب) ٢ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

٥ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم ، ٧ سم
فإن طول الضلع الثالث يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣ سم (جـ) ٤ سم (د) ١٠ سم

٦ مثلث له محور تماثل واحد ، طولا ضلعين فيه ٤ سم ، ٨ سم فإن محيطه = ...

(أ) ١٦ سم (ب) ٢٠ سم (جـ) ٢٤ سم (د) ٣٠ سم

(٧) فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = ٢ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = س سم

فإن س ∈ ....

(أ)]٣ ، ٥[(ب)]٢ ، ٥[(جـ)]٥ ، ٨[(د)]٢ ، ٨[

(٨) إذا كان ٥ سم ، ١٠ سم طولى ضلعين فى مثلث فإن طول الضلع الثالث ∈ ....

(أ)]٥ ، ١٠[(ب)]٥ ، ١٥[(جـ)]٥ ، ١٥] (د) [٥ ، ١٥]

(٩) فى Δ أ ب حـ يكون : أ ب + ب حـ − أ حـ ....

(أ) > صفر (ب) < صفر (جـ) = صفر (د) = محيط Δ أ ب حـ



٤ فى الشكل المقابل :

س ص ع مثلث فيه : ل ∈ $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث س ل = ل ع

أثبت أن : ص ع > س ص

٥ أ ب حـ مثلث فيه $\overline{\text{ب حـ}}$ أكبر الأضلاع طولاً ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث حـ ء = حـ أ

أثبت أن : أ ب > ب ء

٦ أ ب حـ مثلث ، رسم $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ يقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء أثبت أن : ب ء + ء حـ + ٢ أ ء > أ ب + أ حـ



٧ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، م نقطة داخله

أثبت أن : م أ + م ب + م حـ > $\frac{١}{٢}$ محيط Δ أ ب حـ



٨ فى الشكل المقابل :

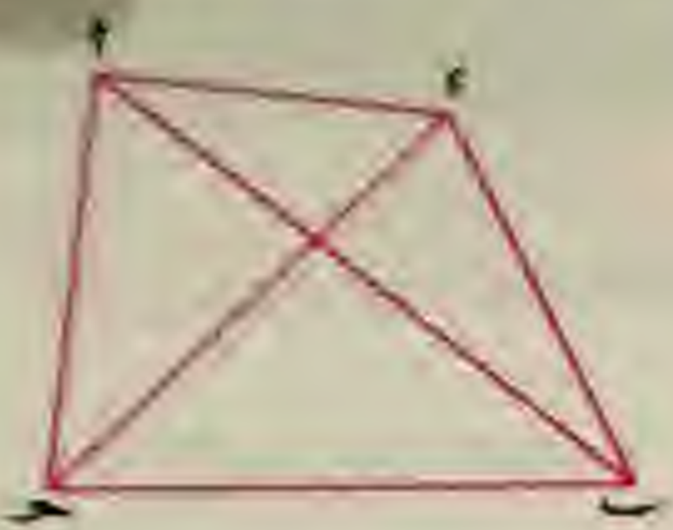
أ ب حـ مثلث فيه :

هـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، و ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

، ع ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : محيط Δ أ ب حـ > محيط Δ هـ و ع

٩ في الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث ، ء نقطة خارجه

أثبت أن : محيط Δ أ ب ح < ٢ (ء أ + ء ب + ء ح)

---

١٠ في الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث فيه :

أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٧ سم

أثبت أن : ق (∠ ح) < ق (∠ ب)

---

١١ برهن أن : طول أي ضلع في مثلث أصغر من نصف محيط المثلث.

---

١٢ أ ب ح ء شكل رباعي   برهن أن : أ ب + ب ح + ح ء > ء أ

---

١٣ برهن أن : مجموع طولي قطري أي شكل رباعي محدب أصغر من محيط الشكل.

---

١٤ أثبت أن : محيط أي شكل رباعي < ضعف مجموع طولي قطريه.

للمتفوقين

١٥ في الشكل المقابل :



م نقطة داخل المثلث أ ب ح

أثبت أن : أ م + م ب < أ ح + ب ح

---

١٦ أ ب ح مثلث ، و منتصف $\overline{\text{ب ح}}$

أثبت أن : [١] أ ب + أ ح > ٢ أ و   [٢] أ ب + أ ح > أ و + ب و

ملخص الوحدة

- مسلمات علاقة التباين :
  - لأى أربعة أعداد أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح

(١) إذا كان : أ > ب	فإن : أ + جـ > ب + جـ
(٢) إذا كان : أ > ب	فإن : أ − جـ > ب − جـ
(٣) إذا كان : أ > ب ، جـ > ٠	فإن : أ جـ > ب جـ
(٤) إذا كان : أ > ب ، ب > جـ	فإن : أ > جـ
(٥) إذا كان : أ > ب ، جـ > د	فإن : أ + جـ > ب + د

- إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من قياس الزاوية المقابلة للضلع الآخر.
- إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الذى يقابل الأخرى.
- فى المثلث القائم الزاوية يكون الوتر هو أطول الأضلاع.
- طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أى قطعة مستقيمة مرسومة من هذه النقطة إلى المستقيم المعلوم.
- بُعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم المعلوم.
- متباينة المثلث : فى أى مثلث يكون مجموع طولى أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.
- طول أى ضلع فى المثلث أكبر من الفرق بين طولى الضلعين الآخرين وأقل من مجموعهما.



امتحانات على الوحدة الخامسة

النموذج الأول

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أصغر من (ب) أكبر من (جـ) يساوى (د) ضعف

٢ فى Δ أ ب جـ إذا كان : ق(∠ب) > ق(∠جـ) فإن : ....

(أ) أ ب > أ جـ (ب) أ ب = أ جـ (جـ) أ ب < أ جـ (د) $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{ب جـ}}$

٣ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣ سم ، ٧ سم

فإن طول الضلع الثالث يساوى ....

(أ) ٧ سم (ب) ٣ سم (جـ) ٤ سم (د) ١٠ سم

٤ أى من الأعداد الآتية تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث ؟

(أ) ٢ ، ٣ ، ٤ (ب) ٢ ، ٣ ، ٥ (جـ) ٢ ، ٣ ، ٦ (د) ٢ ، ٣ ، ٧

٥ مثلث أ ب جـ حيث : ق(∠جـ) = ٦٥° ، ق(∠أ) = ٧٥° فإن : ....

(أ) أ ب > ب جـ (ب) أ ب > أ جـ (جـ) ب جـ > أ ب (د) أ ب = أ جـ

٦ إذا كان : Δ أ ب جـ فيه : ق(∠ب) = ١٣٠° فإن أكبر أضلاعه طولاً هو ....

(أ) $\overline{\text{ب جـ}}$ (ب) $\overline{\text{أ جـ}}$ (جـ) $\overline{\text{أ ب}}$ (د) متوسطه

٢ أكمل ما يأتى :

١ إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله زاوية ....

٢ أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث القائم الزاوية هو ....

٣ فى Δ أ ب جـ إذا كان : أ ب < ب جـ < أ جـ

فإن أصغر زوايا المثلث قياسًا هى ....



٨ فى الشكل المقابل :

حـ ، ب تنتميان إلى $\overleftrightarrow{\text{ا ء}}$

إذا كانت : حـ ء > ا ب فإن : ا حـ .... ء ب

٩ إذا كان : ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ٥ سم ، ب حـ = ٢ سم

فإن : ا حـ ∋] .... ، .... [

٣ (أ) Δ ا ب حـ فيه : ق (∠ ا) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٦٥° رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

(ب) ا ب حـ ء شكل رباعى فيه :

ا ب = ٦ سم ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ٤ سم ، ء ا = ٥ سم

أثبت أن : ق (∠ ء حـ ب) > ق (∠ ء ا ب)

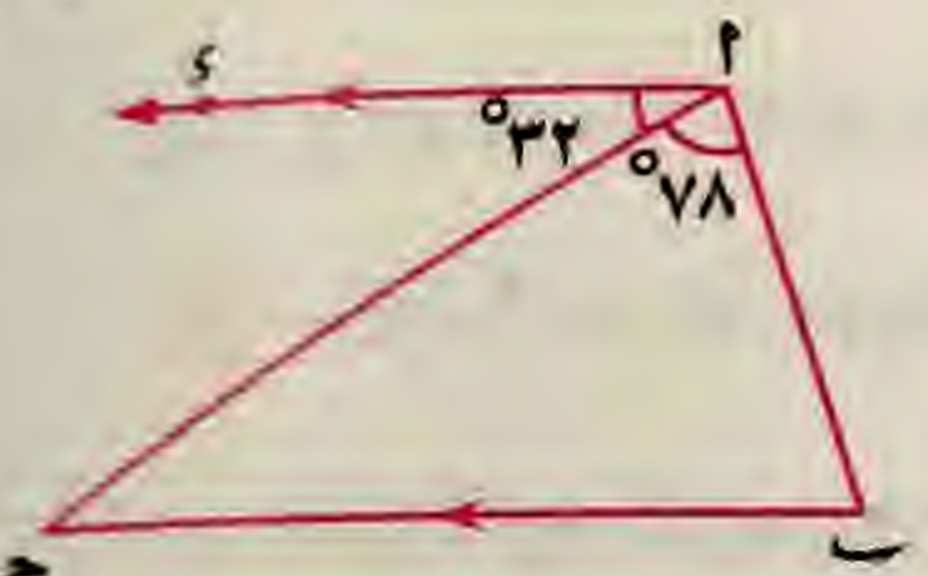


٤ (أ) فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث

، م نقطة داخله

أثبت أن : م ا + م ب + م حـ > $\frac{1}{2}$ محيط Δ ا ب حـ

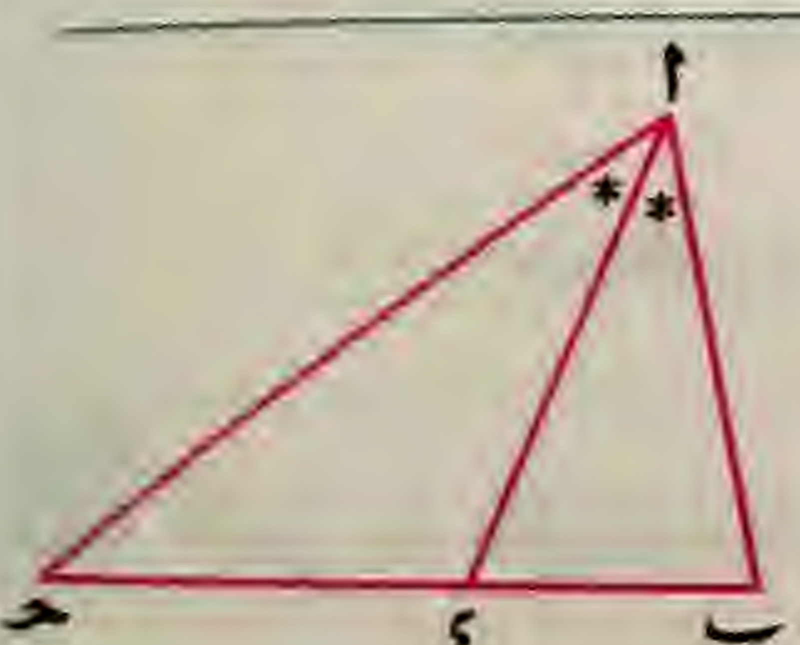


(ب) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ ب ا حـ) = ٧٨°

، ق (∠ حـ ا ء) = ٣٢°

أثبت أن : ا حـ > ا ب



٥ (أ) فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{ا ء}}$ ينصف ∠ ا

أثبت أن : ا حـ > ء حـ



(ب) فى الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه : س ∋ $\overline{\text{ا ب}}$

، ص ∋ $\overline{\text{ا حـ}}$ ، م ∋ $\overline{\text{س ص}}$

أثبت أن : ا ب + ا حـ > م ب + م حـ

النموذج الثانى

أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 إذا كان المثلث ا ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن : ....

(أ) ا حـ < ا ب (ب) ا حـ < ب حـ (جـ) ا ب < ا حـ (د) ب حـ = ا ب

2 مثلث طولا ضلعين فيه : ٤ سم ، ٩ سم وله محور تماثل واحد فإن طول الضلع الثالث يساوى ....

(أ) ٤ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٩ سم (د) ١٣ سم

3 طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

(أ) أصغر من (ب) أكبر من (جـ) يساوى (د) نصف

4 Δ ا ب ء منفرج الزاوية فى ب ، حـ منتصف $\overline{ب ء}$ ، فإن أكبر الأضلاع طولًا هو ....

(أ) $\overline{ا ب}$ (ب) $\overline{ا حـ}$ (جـ) $\overline{ب ء}$ (د) $\overline{ا ء}$

5 أى من الأعداد الآتية لا تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث ؟

(أ) ٣ ، ٤ ، ٤ (ب) ٣ ، ٤ ، ٥ (جـ) ٣ ، ٤ ، ٦ (د) ٣ ، ٤ ، ٧

6 فى Δ س ص ع يكون : س ص + ص ع − س ع ....

(أ) > صفر (ب) < صفر (جـ) = صفر (د) = محيط Δ س ص ع

2 أكمل ما يأتى :

1 إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع ....

2 فى المثلث المتساوى الساقين إذا كان : ا ب = ا حـ ، ق (∠ ا) = ٧٠°

فإن : ا ب < ....

3 فى المثلث ا ب حـ إذا كان : ق (∠ ا) = ٦٧° ، ق (∠ ب) = ٣٣°

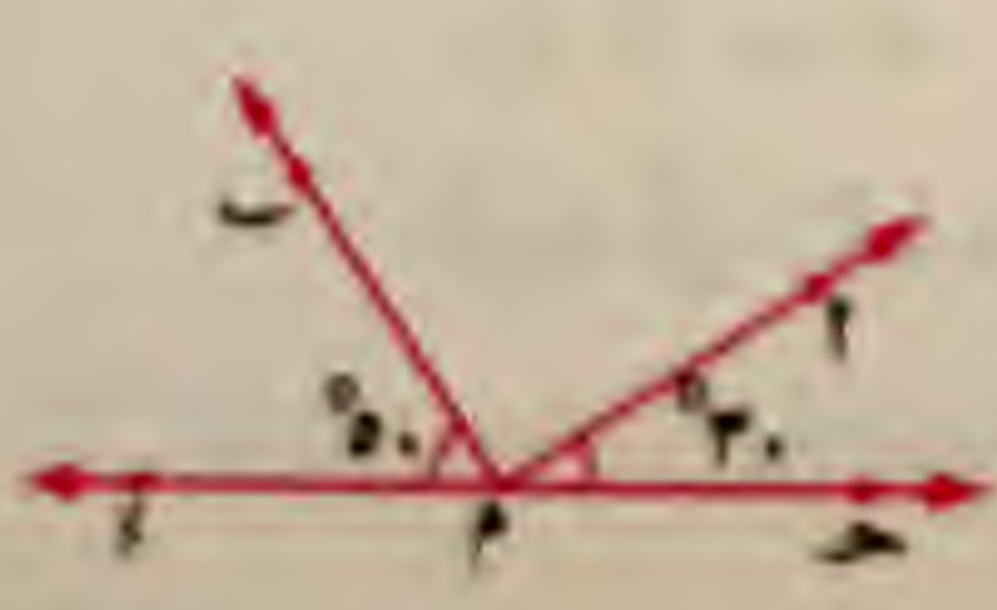
فإن : ا ب < .... < ....

4 إذا كان ا ب حـ مثلثًا فيه : ق (∠ ا) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)

فإن أكبر الأضلاع طولًا هو ....

5 فى الشكل المقابل :

م ∈ $\overleftrightarrow{حـ ء}$



فإن : ق (∠ حـ م ب) .... ق (∠ ا م ء)

٣ (أ) في الشكل المقابل :



ءهـ // بحـ

، ق (∠ أ) = ٦٠°

، ق (∠ أهـ ء) = ٧٥°

أثبت أن : أب > أحـ

(ب) في الشكل المقابل :



ص م ينصف ∠ س ص ع ، م ص = م ع

، ق (∠ ع) = ٢٥°

أثبت أن : ص م > س ص

---

٤ (أ) أ ب حـ مثلث فيه : أب = ٧ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ٥ سم

رتب قياسات زوايا المثلث تصاعديًا.

(ب) في الشكل المقابل :



أب > ب حـ

، أء > ء حـ

برهن أن : ق (∠ ب حـ ء) > ق (∠ ب أ ء)

---

٥ (أ) في الشكل المقابل :



أء = ب ء = ء هـ ، ق (∠ ء أ ب) = ٤٠°

أثبت أن : **١** أء < أب **٢** ب حـ > أحـ

(ب) في الشكل المقابل :



أب = أحـ

، ء ∈ ب حـ

أثبت أن : أب > أء



مشروع بحثى

على الوحدة الخامسة

أهداف المشروع

- استخدام متباينة المثلث لتحديد ثلاثة أرقام تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.
- رسم المثلث بمعرفة أطوال أضلاعه.
- التعرف على نوع المثلث بالنسبة لأطوال أضلاعه.
- التعرف على نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه.
- المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث.
- الربط بين الهندسة والتاريخ.

المطلوب

« برع العديد من العلماء العرب فى مجال الهندسة »

فى ضوء ذلك قُم بإعداد مشروع بحثى يتضمن ما يلى :

- اكتب نبذة عن بعض العلماء العرب وإسهاماتهم فى مجال الهندسة.
- اختر ثلاثة أرقام تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث.
- استخدم المسطرة والفرجار لرسم هذا المثلث.
- حدد نوع هذا المثلث بالنسبة لأطوال أضلاعه، وبالنسبة لقياسات زواياه.
- رتب قياسات زوايا هذا المثلث ترتيبًا تنازليًا.



مفاهيم ومهارات أساسية تراكمية

١ أكمل ما يأتى :

١ عمود إنارة ارتفاعه ٤٫٥ متر يبعد مسافة ٢ متر عن مبنى ارتفاعه ١٠٫٥ متر فإن بعد رأس العمود عن أعلى نقطة بالمبنى يساوى .... م

٢ النسبة بين المساحة الجانبية والكلية للمكعب تساوى ....

٣ متوازى مستطيلات مساحته الجانبية ٢٠٠ سم^{٢} وبعدا قاعدته ٨ سم ، ١٢ سم فإن ارتفاعه يساوى .... سم

٤ قياس الزاوية بالدرجات بين عقربى الساعة عند الساعة السابعة يساوى ....°

٥ فى الشكل المقابل :



مربع كبير مقسم إلى ٧ مربعات صغيرة متطابقة ومثلثين متطابقين. إذا كانت مساحة المربع المظلل = ٤ سم^{٢} فإن مساحة المثلث المظلل تساوى .... سم^{٢}

٦ فى الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = (٤ س − ٥) سم

، ب حـ = (٢ س + ٤) سم ، ا حـ = (٣ س + ١) سم

، ا ب = ا حـ

فإن محيط Δ ا ب حـ = ... سم

٧ مستطيل طوله س سم وعرضه ص سم ومحيطه ع سم فإن العلاقة الرياضية التي تربط بين س ، ص ، ع هي س = ...

٨ إذا كان طول ضلع مثلث متساوي الأضلاع = ١٠ سم فإن ارتفاعه يساوي .... سم

٩ قياس زاوية الخماسي المنتظم يساوي ....°

١٠ الشكل المقابل يشير إلى مستطيل مظلل داخل متوازي أضلاع،
فإن مساحة المستطيل المظلل
تساوي .... سم^2



١١ في الشكل المقابل :
إذا كان محيط المربع أ ب حـ ء = ٢٤ سم
فإن مساحة المربع س ص ع ب
تساوي .... سم^2



١٢ متوازي مستطيلات مساحته الكلية ١٤٨ سم^2 ومساحته الجانبية = ١١٠ سم^2
فإن مساحة قاعدته تساوي .... سم^2

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية الحادة تكملها زاوية ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) منعكسة.

٢ عدد أقطار الشكل السداسي يساوي ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ عدد محاور تماثل الشكل المقابل
هو ....



(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

سلك على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ سم أُعيد تشكيله ليصبح مربعًا

٤ ، فإن طول ضلع المربع يساوى .... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٣

٥ في الشكل المقابل :



دائرة طول نصف قطرها ٢ سم تمس ضلعين من أضلاع مربع

فإن مساحة الجزء المظلل من الشكل تساوى .... سم^2

(أ) ٤ − π (ب) ٢ − π (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) ٢ π

٦ نسبة مساحة منطقة مربعة طول ضلعها ل سم إلى مساحة منطقة مربعة أخرى طول ضلعها ٢ ل سم كنسبة ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ل : ٤ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٧ على خريطة مرسومة كل ١ سم يمثل ٥ كم ، فإذا كان البعد بين موقعين $\frac{1}{2}$ كم فإن البعد بينهما على هذه الخريطة يساوى ....

(أ) ٠,١ سم (ب) ١٠ سم (جـ) ٢,٥ سم (د) ٠,٤ سم

٨ إذا كانت مساحة قاعدة متوازى مستطيلات ١٢ سم^2 ومساحتا وجهين جانبيين فيه ٦ سم^2 ، ٨ سم^2 فإن حجمه يساوى .... سم^3

(أ) ٩ (ب) ٥٧٦ (جـ) ٢٤ (د) ٣٢

٩ سيدار هذا المجسم إلى وضع مختلف أى من الآتى يمكن أن يكون وضع المجسم بعد إدارته ؟



(أ)



(ب)



(جـ)



(د)



١٠ في الشكل المقابل :



حديقة مستطيلة الشكل بها ممر مستطيل عرضه متر

أى صيغة تبين مساحة الجزء المظلل

من الحديقة بالمتر المربع ؟

(أ) $س^2 + ٣ س$ (ب) $س^2 + ٤ س$

(جـ) $س^2 + ٤ س - ١$ (د) $س^2 + ٣ س - ١$

١١ الشكل المقابل يمثل ربع دائرة طول نصف قطرها ٢ سم



فإن محيط الشكل بالسنتيمترات يساوى ....

(أ) ٢π (ب) ٥π (جـ) $\pi + ٤$ (د) $٤ \pi + ٤$

١٢ مساحة مربع طول ضلعه عدد صحيح يمكن أن تكون .... سم^2

(أ) ٦٠٠ (ب) ٩٠٠ (جـ) ٨٠٠ (د) ٧٠٠

١٣ في الشكل المقابل :



مربع محيطه ٣٢ سم مقسم إلى ٨ مثلثات متطابقة

فإن مساحة المنطقة المظللة تساوى .... سم^2

(أ) ٤ (ب) ٨

(جـ) ١٦ (د) ٣٢

١٤ في الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٤٠°

، ق (∠ ب) = ق (∠ ء)

فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٥٥° (جـ) ١١٠° (د) ٢٢٠°

الرياضيات

الصف الثاني الإعدادي

الفصل الدراسي الأول

كراسة التقويم المستمر

- اختبارات قصيرة
- امتحانات نهائية
- مشروعات بحثية

المعاصر

2021

إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكراسة

أولًا الجبر والإحصاء



- الاختبارات القصيرة (عدد ١٨ اختبارًا)
- الامتحانات النهائية :
  - نماذج امتحانات الكتاب المدرسي
  (عدد ٢ نموذج + نموذج للطلاب المدمجين)
  - امتحانات بعض مدارس المحافظات (عدد ١٥ امتحانًا)

ثانيًا الهندسة



- الاختبارات القصيرة (عدد ٩ اختبارات)
- الامتحانات النهائية :
  - نماذج امتحانات الكتاب المدرسي
  (عدد ٢ نموذج + نموذج للطلاب المدمجين)
  - امتحانات بعض مدارس المحافظات (عدد ١٥ امتحانًا)

مشروعات بحثية على الفصل الدراسي الأول

أولاً الجبر والإحصاء



الاختبارات القصـيرة

فى الجبر والإحصاء



اختبار قصير ١ على الدرس الأول - الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\sqrt[3]{س} = \frac{1}{4}$ فإن : س = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{16}$ (جـ) $\frac{1}{32}$ (د) $\frac{1}{64}$

٢ طول قطر كرة حجمها ٣٦ π سم^3 يساوى .... سم (حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ π نق^3)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢٧

٣ $\sqrt[3]{64} = \sqrt{..........}$

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٣٦

٢ (أ) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين فى ن :

١ ٢ س^3 − ١ = ٥٣ ٢ (٥ س − ٣)^3 = ٨

(ب) إناء مكعب سعته ٨ لترات. احسب طول حرفه الداخلى بالسنتيمتر.

اختبار قصير ٢ حتى الدرس الثانى - الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد غير النسبى المحصور بين ٣ ، ٤ هو ....

(أ) ٣,٦ (ب) $\sqrt{6}$ (جـ) $\sqrt{15}$ (د) $\sqrt{17}$

٢ المربع الذى طول ضلعه $\sqrt{7}$ سم تكون مساحته .... سم^2

(أ) ٢٨ (ب) ٤٩ (جـ) ٧ (د) ١٤

٣ إذا كانت : س ∈ ص ، س < $\sqrt{11}$ < س + ١ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ١٠

٢ (أ) أثبت أن : $\sqrt{5}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

(ب) عين النقطة التى تمثل العدد ١ + $\sqrt{2}$ على خط الأعداد.

اختبار قصير ٣ حتى الدرس الثالث - الوحدة الأولى

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

(١) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ هى ....

(٢) ح - ن = ...

(٣) إذا كان : $\sqrt[٣]{س} = -٥$ فإن : س = ...

٢ (أ) حل كلًا من المعادلتين الآتيتين لأقرب جزء من عشرة علمًا بأن س ∈ ح :

(١) $\frac{١}{٢} س^٢ - ٣ = ٠$

(٢) $(س - ٣)^٢ = ٥$

(ب) اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية موجبة أصغر من ٣

اختبار قصير ٤ حتى الدرس الرابع - الوحدة الأولى

الزمن ثلث ساعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) [-٣ ، ٢] - {-٣ ، ٦} = ...

(أ)]-٣ ، ٦[(ب)]-٣ ، ٢] (ج)]-٣ ، ٢[(د) ∅

(٢) إذا كان : $\sqrt{٧}$ ∈]س ، س + ١[حيث س ∈ ص فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣) $ح_+$ ∩ [-١ ، ٣] = ...

(أ)]٠ ، ٣[(ب)]٠ ، ٣] (ج) [٠ ، ٣] (د) [٠ ، ٣[

٢ (أ) إذا كانت : س =]- ∞ ، ١] ، ص = [-٢ ، ٤[فأوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد :

(١) س ∪ ص (٢) س ∩ ص (٣) س - ص (٤) سَ

(ب) أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة : $٣ س^٢ + ١٢٥ = ٢٢١$

اختبار قصير ٥ — حتى الدرس الخامس - الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : $س^٢ + ٩ = ١$ حيث $س \in ع$ فإن : $س = \dots\dots$

(أ) -٨ (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ٨

(٢) إذا كانت : $س = \sqrt{٣} + ٢$ فإن : $س^٢ = \dots\dots$

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) $٧ + ٢\sqrt{٣}$ (د) $٧ + ٤\sqrt{٣}$

(٣) إذا كان : $س^٢ - ص^٢ = ٦٠$ ، $س + ص = ٥\sqrt{٦}$ فإن : $س - ص = \dots\dots$

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $٢\sqrt{٦}$ (جـ) $٣\sqrt{٦}$ (د) $٤\sqrt{٦}$

٢ (أ) إذا كانت : $س = -\sqrt{٣}$ ، $ص = ٢\sqrt{٣} - ٢$ فأوجد قيمة كل من :

(١) $س + ص$ (٢) $\frac{ص}{س}$

(ب) إذا كانت : $س = [-١ ، ٥[$ ، $ص =]١ ، ٧]$ فأوجد مستعيناً بخط الأعداد :

(١) $س \cap ص$ (٢) $س \cup ص$ (٣) $س - ص$

اختبار قصير ٦ — حتى الدرس السادس - الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})^٢ = \dots\dots$

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) $\sqrt{١٨}$

(٢) $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٠} - \sqrt{٥} = \dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٢}\sqrt{١٥}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) صفر (د) ١

(٣) إذا كانت π هي النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها فإن : $\pi \in \dots\dots$

(أ) ط (ب) ص (جـ) ن (د) ن̄

٢ (أ) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{٧٥} - ٢\sqrt{٢٧} + ٣\sqrt{\frac{١}{٣}}$

(ب) أوجد في ع مجموعة حل المعادلة : $\frac{١}{٦}س^٢ + ٦ = ٦\frac{١}{٢}$

اختبار قصير ٧ — حتى الدرس السابع - الوحدة الأولى

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

(١) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ = ... فى أبسط صورة.

(٢) المستطيل الذى بعداه ($\sqrt{٣} + ١$) سم ، ($\sqrt{٣} - ١$) سم تكون مساحته .... سم^{٢}

(٣) [١ ، ٥] − {١ ، ٥} = ...

---

٢ (أ) إذا كانت : س = $\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ ، ص = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

فأوجد قيمة المقدار : س^{٢} − ٢ س ص + ص^{٢}

(ب) أوجد على صورة فترة مستعينًا بخط الأعداد :]− ∞ ، ١] ∪ [٢ ، ∞[

اختبار قصير ٨ — حتى الدرس الثامن - الوحدة الأولى

الزمن ثلث ساعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : س =]− ∞ ، ٠] فإن : سَ = ...

(أ) ع$_{+}$ (ب)]٠ ، ∞[(جـ)]− ∞ ، ٠] (د) ع$_{-}$

(٢) $\frac{\sqrt[٣]{٢٤}}{\sqrt[٣]{٣}}$ = ...

(أ) ٢ $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ٢

(٣) إذا كان : س = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، س ص = ١ فإن : ص = ...

(أ) $\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ (د) ١

---

٢ (أ) إذا كانت : س = ٢ + $\sqrt[٣]{٤}$ ، ص = ٢ − $\sqrt[٣]{٤}$

فأوجد قيمة : $\left(\frac{س - ص}{س + ص}\right)^{٢}$

(ب) اختصر لأبسط صورة :

$\sqrt{١٨} - \sqrt[٣]{٧٢} - \sqrt{٨} + \sqrt[٣]{٩}$

اختبار قصير ٩ حتى الدرس التاسع - الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدائرة التي طول نصف قطرها $\sqrt{14}$ سم تكون مساحتها .... سم^2

(أ) 14π (ب) $2\sqrt{14}\pi$ (جـ) ١٤ (د) $2\sqrt{14}$

(٢) الأسطوانة الدائرية القائمة التي طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم وارتفاعها ٥ سم يكون حجمها ....

(أ) 15π سم^3 (ب) 75π سم^3 (جـ) 45π سم^3 (د) $\frac{3}{5}\pi$ سم^3

(٣) مرافق العدد $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ هو ....

(أ) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (جـ) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (د) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

٢ (أ) أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول نصف قطر قاعدتها وحجمها 27π سم^3
احسب المساحة الجانبية للأسطوانة.

(ب) إذا كانت : س $= \sqrt{5}-\sqrt{3}$ ، ص $= \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ فأوجد قيمة : س^2 + ٢ س ص + ص^2

اختبار قصير ١٠ حتى الدرس العاشر - الوحدة الأولى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة الحل في ح للمتباينة : −١ < − س ≤ ١ هي ....

(أ) [١ ، ١-[(ب) [١ ، ١-] (جـ)]١ ، ١-] (د)]١ ، ١-[

(٢) إذا كان ثلاثة أرباع حجم كرة يساوي 8π سم^3 فإن طول نصف قطرها يساوي .... سم

(أ) ٦٤ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

(٣) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2} =$ ....

(أ) $\sqrt[3]{4}$ (ب) $\sqrt[3]{8}$ (جـ) $\sqrt[3]{16}$ (د) $\sqrt[3]{2}$

٢ (أ) أوجد في ح مجموعة الحل للمتباينة الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :

−١ < ١ − ٢ س ≤ ٥

(ب) اختصر لأبسط صورة : $2\sqrt{5} + 9\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{27} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

اختبار قصير ١١ حتى الدرس الأول - الوحدة الثانية

الزمن ثلث ساعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزوج المرتب الذى يحقق العلاقة : ٣ س - ص = ١ هو ....

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (-١ ، ٢) (جـ) (١ ، ٢) (د) (٢ ، ١)

(٢) إذا كان (٣ ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : س + ص = ١٥ فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) -٥ (د) -٣

(٣) إذا كان (١ ، ٣) يحقق العلاقة : ص = ٣ س + حـ فإن : حـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ (أ) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٢ س - ٣ ص = ٦ ثم مثل العلاقة بيانيًا.

(ب) إذا كان المستقيم : ص - ٢ س = أ يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ب)

فأوجد قيمتى : أ ، ب

اختبار قصير ١٢ حتى الدرس الثانى - الوحدة الثانية

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان : $-\sqrt[3]{٢٥} = \sqrt[3]{س}$ فإن : س = ...

(٢) ميل المستقيم ل بالشكل المقابل هو ....

(٣) ميل أى مستقيم يوازى محور الصادات يكون ....



٢ (أ) مثل المستقيم الذى يمثل العلاقة : ٢ س + ص = ٤ ، وإذا قطع هذا المستقيم محور السينات فى النقطة أ ومحور الصادات فى النقطة ب فأوجد مساحة المثلث أ و ب حيث و نقطة الأصل.

(ب) أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة حيث أ (١ ، ١) ، ب (-٥ ، -١١) ، حـ (٤ ، ٧)

اختبار قصير ١٣ — حتى الدرس الثالث - الوحدة الثانية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان (٤ ، ٢) يحقق العلاقة : ص = ٣ س − ب فإن : ب = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢ (ج) ٨ (د) ٤

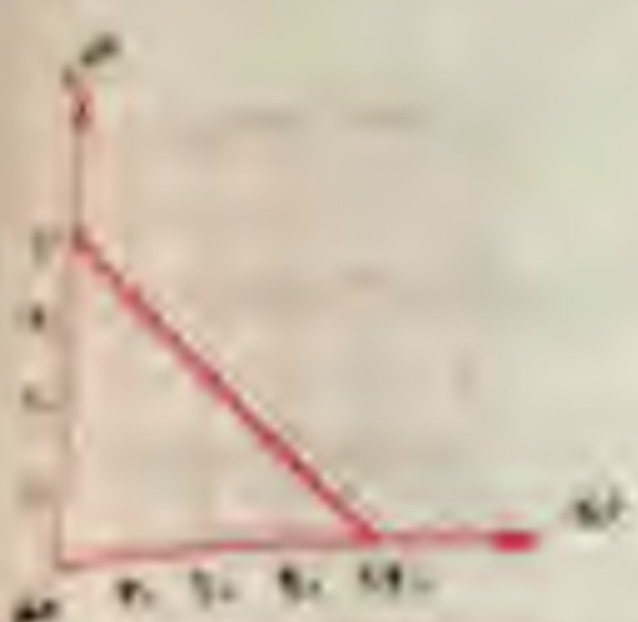
٢) ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٣ ، −٥) هو ....

(أ) صفر (ب) غير معرف (ج) [illegible] (د) [illegible]

٣) مكعب محيط أحد أوجهه ١٢ سم تكون مساحته الجانبية .... سم²

(أ) ١٤٤ (ب) ٦٤ (ج) ٣٦ (د) ٥٤

٢ (أ) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٠٨٠ سم³ ، وارتفاعها ٢٠ سم أوجد طول قطر قاعدتها. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



(ب) ملأ محمد خزان سيارته بالوقود والشكل البياني يوضح العلاقة بين الزمن ن بالدقيقة وكمية الوقود ص باللتر. من الرسم

أولاً : أوجد :

(١) أكبر سعة للخزان. (٢) متوسط استهلاك الوقود في الدقيقة.

ثانياً : متى يفرغ الخزان ؟

اختبار قصير ١٤ — حتى الدرس الأول - الوحدة الثالثة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) مجموعة الحل للمعادلة : $\sqrt{٢}$ س − ١ = ٣ في ح هي ....

(أ) {٢} (ب) {$\sqrt{٢}$} (ج) {٢$\sqrt{٢}$} (د) {٤$\sqrt{٢}$}

٢) إذا كانت : س = $\sqrt{٣}$ + ٢ ، ص = $\sqrt{٣}$ − ٢ فإن : (س ص ، س + ص) = ...

(أ) (١ ، ٢$\sqrt{٣}$) (ب) (−١ ، ٢$\sqrt{٣}$) (ج) (٥ ، ٢$\sqrt{٣}$) (د) (٥ ، ٩)

٣) إذا كان (−١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) ١ (د) ١٠

٢ فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالبًا في أحد الاختبارات :

٥	١٢	٧	١٠	٢	١٢	٨	٧	١٦	٩	٩	٤	١١	٩	٥
١٧	١٣	١٢	٣	١٤	١١	٢	١٩	١٤	٧	٩	١٣	١٣	١٥	٨

كوّن الجدول التكراري ذي المجموعات لهذه البيانات.

اختبار قصير ١٥ حتى الدرس الثانى - الوحدة الثالثة

الزمن ثلث ساعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت $س^٣ + ٩ = ١$ حيث $س \in ح$ فإن $س = \dots$

(أ) −٨ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٨

٢ ميل المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٣) ، ب (٠ ، ١) هو ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) −١

٣ $\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{-٢} = \dots\dots$

(أ) $\sqrt[٣]{٥٢}$ (ب) $\sqrt[٣]{٢}$ (جـ) $٢\sqrt[٣]{٢}$ (د) $٤\sqrt[٣]{٢}$

٢ الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لأجور ١٠٠ عامل بأحد المصانع أسبوعيًا :

المجموعات	−٥٠	−٦٠	−٧٠	−٨٠	−٩٠	المجموع
التكرار	٥	١٥	٣٠	٤٠	١٠	١٠٠

١ أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٧٠ جنيهًا أسبوعيًا.

٢ ارسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد.

اختبار قصير ١٦ حتى الدرس الثالث - الوحدة الثالثة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ٢٧ ، ٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٦ ، ك هو ١٤

فإن : ك = ...

٢ مجموعة حل المتباينة : $-س > ٣$ فى ح هى ....

٣ إذا كان الوسط الحسابى لتوزيع تكرارى هو ١٢,٣ ومجموع تكراراته ١٠٠ فإن مجموع حواصل ضرب تكرار كل مجموعة فى مركزها يساوى ....

٢ (أ) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى للحافز الأسبوعى لعدد ١٠٠ عامل فى أحد المصانع :

الحوافز بالجنيه	−٢٠	−٣٠	−٤٠	−٥٠	−٦٠	−٧٠
عدد العمال	١٠	١٤	ك	ك + ٤	٢٠	٨

١ احسب قيمة ك

٢ أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

(ب) إذا كانت : $س = \sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، $ص = \frac{٢}{س}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $\frac{س + ص}{س ص}$

اختبار قصير ١٧ حتى الدرس الرابع - الوحدة الثالثة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان ترتيب الوسيط لتوزيع تكرارى = ٥٠ فإن مجموع التكرارات = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠٠ (د) ٥

(٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٣ ومركزها ٧ فإن حدها الأعلى ....

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٣) الزوج المرتب (-١ ، ٥) يحقق العلاقة ....

(أ) ٢ س + ص = ٤ (ب) س - ٤ = ص (جـ) ٢ س + ص = ٣ (د) ٥ س = ص

٢ باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	المجموع
التكرار	٢	٤	٨	٦	٤	٢٤

اختبار قصير ١٨ حتى الدرس الخامس - الوحدة الثالثة

١ أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، $٢^{س}$ هو ٤ فإن : س = ...

(٢) $\sqrt[٣]{٤} + ٢ \sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} =$ ....

(٣) أى مستقيم يوازى محور السينات ميله يساوى ....

٢ (أ) الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ١٠٠ تلميذ فى أحد الاختبارات :

مجموعات الدرجات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	س -	٣٤-	المجموع
عدد التلاميذ	٢	١٠	٣ ك	٧ ك + ٥	٢٥	٦	٢	١٠٠

(١) أوجد قيمتى س ، ك (٢) أوجد الدرجة المنوالية باستخدام المدرج التكرارى لهذا التوزيع

(ب) إذا كان : $س = \frac{٤}{٣ + \sqrt{٥}}$ ، $ص = ٣ + \sqrt{٥}$ أثبت أن : س ، ص مترافقان

ثم أوجد القيمة العددية للمقدار : $(س + ص)^{٢} - ٣٥$

الامتحانات النهائيـة

في الجبر والإحصاء



نموذج ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

١) مجموعة حل المعادلة : (س^{٢} + ٣) (س^{٢} + ١) = ٠ هى .... (س ∈ ع)

٢) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها هو ١٥ فإن : س = ...

٣)]-٢ ، ١[∪ {-٢ ، ٠} = ...

٤) المكعب الذى حجمه ٨ سم^{٣} يكون مجموع أطوال أحرفه .... سم

٥) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ فى أبسط صورة هو ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان طول نصف قطر كرة يساوى ٦ سم فإن حجمها يساوى ....

(أ) ٦ π سم^{٣} (ب) ٣٦ π سم^{٣} (جـ) ٧٢ π سم^{٣} (د) ٢٨٨ π سم^{٣}

٢) إذا كانت النقطة (أ ، ١) تحقق العلاقة : س + ص = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ٥

٣) $(٢\sqrt[٣]{٢})^{٣}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٤٠

٤) الوسيط لمجموعة القيم : ٣٤ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٢٢ ، ٤ هو ....

(أ) ٢٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

٥) إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ٢٧ ، ٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٦ ، ك هو ١٤ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٢٧ (د) ٨٤

٦) فى الشكل المقابل :

قيمة المنوال = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤٠



٣ (أ) أوجد قيمة: $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

(ب) إذا كان: $س = \frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ أثبت أن: س ، ص عددان مترافقان

٤ (أ) ارسم بيانيًا العلاقة الخطية: ص = ٢ − س

(ب) أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{٢س + ١}{٦} < س + ١ < \frac{س + ٤}{٢}$ في ح وممثلها على خط الأعداد.

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $٤\sqrt{٢}$ سم وارتفاعها ٩ سم ، أوجد حجمها بدلالة π وإذا كان حجمها يساوي حجم كرة فأوجد طول نصف قطر الكرة.

(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعات	٥−	١٥−	٢٥−	٣٥−	٤٥−	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

نموذج ٢

أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أكمل ما يأتي:

١) المعكوس الجمعي للعدد: $-\sqrt{٣} - \sqrt{٥}$ هو ....

٢) $(\sqrt{٨} + \sqrt{٢})(\sqrt{٨} - \sqrt{٢}) =$ ....

٣) مرافق العدد $\frac{٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ هو ....

٤) إذا كان حجم كرة = $\frac{٩}{٢}$ π سم^٣ فإن طول قطرها = ...

٥) $[٣ ، ٤] - \{٣ ، ٥\} =$ ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كان حجم مكعب = ٢٧ سم^٣ فإن مساحة أحد أوجهه = ...

(أ) ٣ سم^٢ (ب) ٩ سم^٢ (جـ) ٣٦ سم^٢ (د) ٥٤ سم^٢

٢) إذا كان المنوال لمجموعة القيم: ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢س هو ٤ فإن: س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٣) إذا كان الوسط الحسابي للقيم: ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ك − ١ ، ك هو ١٨ فإن: ك = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٢٩ (د) ٩٠

(٤) إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨ فإن مركزها هو

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

(٥) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها يساوي نق سم وارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها ، يكون حجمها يساوي .... سم^3

(أ) π نق^2 (ب) π نق^3 (ج) ٢ π نق^3 (د) ٢ نق^3

(٦) مجموعة حل المعادلة : س (س^2 − ١) = صفر ، س ∈ ع هي :

(أ) {٠} (ب) {١} (ج) {−١} (د) {٠ ، ١ ، −١}

٣ (أ) اختصر لأبسط صورة :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

(ب) اثبت أن : $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54}$ = صفر

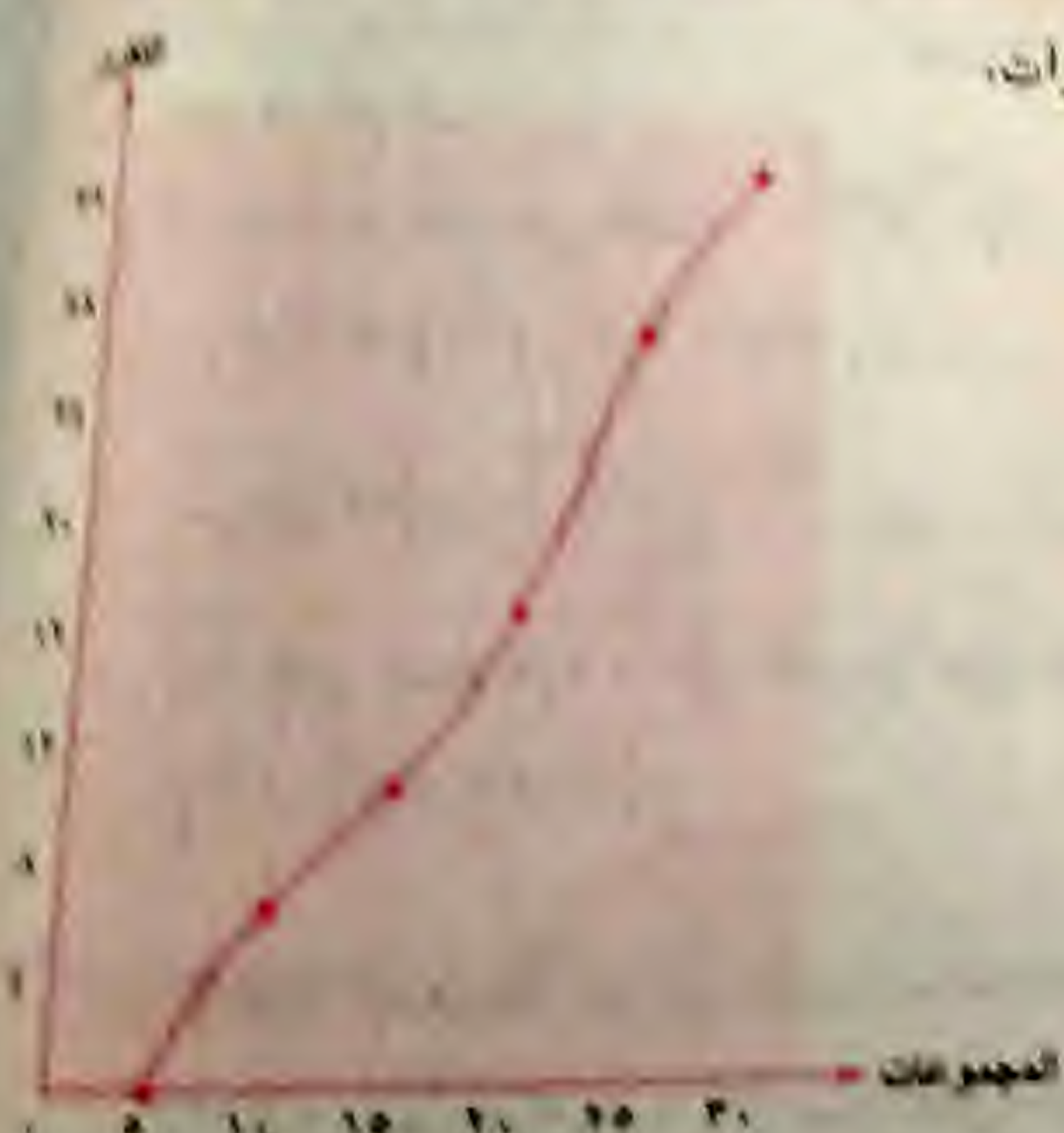
٤ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة : −٢ < ٣ س + ٧ ≤ ١٠ في ع مع تمثيل فترة الحل على خط الأعداد.

(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ فأوجد قيمة : س^4 − ٢ س^2 + ١

٥ (أ) الشكل المقابل يمثل درجات ٣٢ طالبًا في أحد الاختبارات.

أكمل :

الدرجة الوسيطية = ...



(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	−٥	−١٥	−٢٥	−٣٥	−٤٥	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

نموذج امتحان للطلاب المدمجين

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل العبارات التالية لتصبح صحيحة :

١ مرافق العدد $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ هو ....

٢ $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} =$ ....

٣ المنوال لمجموعة القيم : ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٤ ، ٣ هو ....

٤ الوسيط لمجموعة القيم : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ هو ....

٥ مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٩ =$ صفر فى ح هى ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٩ ، ٦ ، ٥ ، ١٤ ، ١ يساوى ....

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٩

٢ أبسط صورة للمقدار : $(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})$ هى ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $٢\sqrt{٣}$

٣ المعكوس الجمعى للعدد $-\sqrt{٥}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) −٥

٤ [٣ ، ٥] − {٣ ، ٥} = ...

(أ)]٣ ، ٥[(ب)]٣ ، ٥] (جـ) ∅ (د) [٣ ، ٥[

٥ مكعب حجمه ٦٤ $سم^٣$ فإن طول حرفه .... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

٣ اكتب أمام العبارة فى العمود الثانى رقم الجملة المناسبة لها من العمود الأول :

العمود الأول		العمود الثانى
١ مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٢٥ = ٠$ فى ح هى	( )	[٠ ، ٢]
٢ [−٣ ، ٢] ∩ [٠ ، ٢] = ...	( )	٧
٣ إذا كان ترتيب الوسيط هو الرابع فإن عدد القيم هو	( )	{٥ ، −٥}
٤ $\sqrt{٣}$ هو عدد	( )	 ٣ ٧
٥ مجموعة حل المتباينة : ٣ ≤ س ≤ ٧ على خط الأعداد هى	( )	غير نسبى

٤ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

١) الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = مجموع القيم ÷ عددها ( )

٢) إذا كان : س = $\sqrt{١٣} - \sqrt{٧}$ ، ص = $\sqrt{١٣} + \sqrt{٧}$ فإن : س ، ص مترافقان. ( )

٣) العدد غير النسبى $\sqrt{٧}$ يقع بين ٢ ، ٣ ( )

٤) $\sqrt{٧٥} - ٢\sqrt{٢٧} = ٧\sqrt{٣}$ ( )

٥) أبسط صورة للعدد $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ هى $\frac{\sqrt{٥}}{٥}$ ( )

٥ (أ) أكمل : إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ٨

فإن مركزها = $\frac{..............+..............}{٢}$ = ...

(ب) الجدول الآتى لإيجاد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-٥٠	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

المجموعات	مركز المجموعة (م)	التكرار (ك)	مركز المجموعة × التكرار (م × ك)
٥-	١٠	٧	١٠ × ٧ = ٧٠
١٥-	٢٠	١٠	٢٠ × ١٠ = ...
٢٥-	....	....	.... × ١٢ = ...
٣٥-	....	....	.... × ١٣ = ...
٤٥-	....	....	.... × ٨ = ...
المجموع		٥٠	....

الوسط الحسابى = $\frac{مجـ (ك × م)}{مجـ (ك)}$ = $\frac{..............}{..............}$ = ...

١ محافظة القاهرة

إدارة شرق مدينة نصر
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ن ∪ نَ = ...

(أ) $\varnothing$ (ب) ح (جـ) ن (د) $\{\varnothing\}$

٢ $\sqrt[3]{٦٤} + \sqrt[3]{١٦-}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ±٨

٣ المنوال للقيم : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٢ ، ٣ هو ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٨

٤ مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٣٦$ = صفر في ح هي ....

(أ) $\{٦\}$ (ب) $\{٦ ، -٦\}$ (جـ) $\varnothing$ (د) $\{-٦\}$

٥ المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) $٣\sqrt{٦}$

٦ إذا كان الزوج المرتب (−٢ ، ٣) يحقق العلاقة : س − ص = أ فإن : أ = ...

(أ) ٧ (ب) −٧ (جـ) ٦ (د) −٥

---

٢ أكمل العبارات الآتية :

١ [٣ ، ٥] − {٣ ، ٥} = ...

٢ الوسط الحسابي لمجموعة القيم : ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ هو ....

٣ مرافق العدد $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ (في أبسط صورة) هو ....

٤ مكعب حجمه ٢٧ سم^٣ فإن طول حرفه .... سم.

٥ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٤ والحد الأعلى لها هو ١٠ فإن مركز هذه المجموعة هو ....

---

٣ (أ) إذا كان : أ = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، ب = $\frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ أوجد قيمة : $\frac{أ + ب}{أ ب}$

(ب) أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ (٧ ، ٢) ، ب (−٢ ، ٠)

٤ (أ) أوجد مجموعة الحل في ح لكل مما يأتي :

[١] $٣ س + ٥ > ٢$ [٢] $(٢ س - ١)^٣ = ٨$

(ب) أوجد في أبسط صورة : $\frac{١}{٤} \sqrt{٨٠} - \sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥} + \sqrt{١٢٥}$

٥ (أ) إذا كانت : س =]-١ ، ٣] ، ص = [٠ ، ٥[

أوجد مستعيناً بخط الأعداد : [١] س ∩ ص [٢] س − ص

(ب) أوجد الوسط الحسابي مستعيناً بالجدول الآتي :

المجموعات	٨ −	١٢ −	١٦ −	٢٠ −	٢٤ −	المجموع
التكرار	٤	١٠	١٦	١٢	٨	٥٠

٢ محافظة الجيزة

إدارة العمرانية
مدارس الفسطاط الخاصة

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] $\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{٣} =$ ....

(أ) ٩ (ب) ٢٧ (جـ) صفر (د) $\sqrt{٣}$

[٢] إذا كان : $س = \sqrt{٣} + ١$ ، $ص = \sqrt{٣} - ١$ فإن : $(س + ص)^٢ =$ ....

(أ) ٢٤ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

[٣] إذا كان حجم مكعب ١٢٥ سم^٣ فإن مجموع أطوال أحرفه .... سم

(أ) ٢٥ (ب) ٦٠ (جـ) ١٥٠ (د) ١٢٥

[٤] إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢ س هو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

[٥] [٢ ، ٦] − {٢ ، ٦} = ...

(أ) [٢ ، ٦] (ب)]٢ ، ٦] (جـ) [٢ ، ٦[(د)]٢ ، ٦[

[٦] ح = ...

(أ) $ح_+ ∪ ح_-$ (ب)]صفر ، ∞[(جـ)]−∞ ، ∞[(د) غير ذلك.

٢ أكمل :

[١] المعكوس الجمعي للعدد : $-\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ هو ....

[٢] إذا كان الزوج المرتب (١ ، ك) يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥ فإن : ك = ...

[٣] إذا كان الوسط الحسابي للقيم : ٢٧ ، ك ، ٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٦ هو ١٤ فإن : ك = ...

٤ مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

٥ المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) يوازى محور ....

٣ (أ) أوجد قيمة : $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

(ب) أوجد حجم أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها $٤\sqrt{٢}$ سم وارتفاعها ٩ سم بدلالة π

٤ (أ) أوجد حل المتباينة : $٢ < ٣س + ٧ \le ١٠$ فى ح مع تمثيل الحل على خط الأعداد.

(ب) إذا كانت : $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $س ص = ٢$ فأثبت أن : س ، ص مترافقان.

٥ (أ) إذا كانت : $س = [-٣ ، ٤]$ ، $ص = [-٢ ، ٢[$

بالاستعانة بخط الأعداد أوجد : $س \cap ص$ ، ص − س

(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

٣ محافظة الإسكندرية

إدارة شرق
توجيه الرياضيات (ب)

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الوسط الحسابى للقيم : ٩ ، ٦ ، ٥ ، ١٤ ، ١ هو ....

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٩

٢ المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو ....

(أ) $\sqrt{١٠}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $٢\sqrt{٥}$ (د) $-٢\sqrt{٥}$

٣ $(١ + \sqrt{٧})(١ - \sqrt{٧}) =$ ....

(أ) ٢ (ب) −٤ (جـ) $-٢\sqrt{٧}$ (د) −٦

٤ ميل أى خط مستقيم موازٍ لمحور السينات هو ....

(أ) ١ (ب) غير معرف. (جـ) −١ (د) صفر

٥ حجم متوازى مستطيلات أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم هو .... سم^٣

(أ) ٦ (ب) ٣٦ (جـ) $٦\sqrt{٦}$ (د) $١٨\sqrt{٢}$

٦ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو ك ومركز المجموعة ١٥ فإن : ك = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٢ أكمل ما يأتى :

١) المنوال للقيم : ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٥ ، ٧ ، ٥ هو ....

٢) $]-٢ ، ٢[\cup \{-٢ ، ٠\} =$ ....

٣) الوسيط للقيم : ٣١ ، ١٣ ، ٩ ، ٦٠ ، ١ ، ٤٥ ، ٤ هو ....

٤) إذا كان (ل ، ٤) يحقق العلاقة : س + ٢ ص = ١٥ فإن : ل = ...

٥) المساحة الكلية لمكعب طول حرفه ٤ سم هى ....

٣ (أ) أوجد مجموعة الحل للمتباينة الآتية : $-١ < ٢ س - ٣ \leq ٥$ فى ح موضحًا ذلك على خط الأعداد.

(ب) إذا كان : $س = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$ أوجد قيمة المقدار : $\frac{س + ص}{س ص - ١}$ مع الخطوات.

٤ (أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة اختصر ما يأتى :

١) $\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨}$ مع الخطوات.

٢) $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{١٦} - ٢ \sqrt[٣]{٥٤}$ مع الخطوات.

(ب) إذا كان (أ ، ٣) ، (٣ ، ب) يحققان العلاقة : ٢ س - ص = ١ أوجد كلًا من :

١) قيمتى أ ، ب

٢) ميل المستقيم المعطى بالعلاقة : ٢ س - ص = ١

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠π سم^٣ وارتفاعها ١٠ سم. أوجد طول قطر قاعدتها ومساحتها الجانبية.

(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	٨	٥٠

٤ محافظة القليوبية

توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) مجموعة حل المعادلة : س + ٥ = ٥ فى ط هى ....

(أ) $\{٠\}$ (ب) $\{١٠\}$ (جـ) $\{-١٠\}$ (د) $\emptyset$

٢) العدد النسبى الذى يقع بين ٠,٢ ، ٠,٣ هو ....

(أ) ٠,٢١ (ب) ٠,١١ (جـ) ٠,٣١ (د) ٠,٣٣

٣ $\sqrt[3]{س^{٦}}$ = ...

(أ) $س^{٢}$　(ب) $س^{٣}$　(ج) س　(د) $س^{٦}$

٤ إذا كان (٢ ، -٥) يحقق العلاقة : ٣ س - ص + حـ = ٠　فإن : حـ = ...

(أ) ١　(ب) -١　(ج) ١١　(د) -١١

٥ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ ك - ١ ، ك هو ١٨　فإن : ك = ...

(أ) ١　(ب) ٧　(ج) ٢٩　(د) ١٩

٦ الوسيط للقيم : ٣٤ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ٤٠ ، ٢٢ ، ٤ هو ....

(أ) ٢٢　(ب) ٢٣　(ج) ٢٤　(د) ٢٥

٢ أكمل :

١ ٠,٣ = ... على صورة $\frac{أ}{ب}$

٢ $\sqrt[3]{٣٤٣}$ = ...

٣ ميل أى مستقيم يوازى محور السينات يساوى ....

٤ المنوال هو القيمة .... تكرارًا فى قيم المجموعة.

٥ إذا كان ترتيب الوسيط هو الرابع فإن عدد القيم هو ....

٣ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة : ٥ س - ٣ > ٢ س + ٩ فى ح

(ب) أوجد قيمة : $\sqrt{١٨} + \sqrt[3]{٥٤} - ٣\sqrt[3]{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

٤ (أ) إذا كان طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة هو ٤ سم ، وارتفاعها ٩ سم

أوجد حجم الأسطوانة بدلالة π

(ب) إذا كانت : أ (٢ ، -١) ، ب (-١٠ ، ٣) ، حـ (٢ ، ٣) أوجد : ميل كل من $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$

٥ (أ) أوجد : [-١ ، ٤] - [-٣ ، ٢[باستخدام خط الأعداد.

(ب) الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات ٥٠ طالبًا فى امتحان :

المجموعات	٢ -	٦ -	١٠ -	١٤ -	١٨ -	٢٢ -	٢٦ -	المجموع
التكرار	٣	٥	٩	١٠	١٢	٧	٤	٥٠

أوجد الوسط الحسابى لدرجات الطلاب.

٥ محافظة الشرقية

إدارة غرب الزقازيق - توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل العبارات الآتية :

١ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : س^{٢} − ٨ = ٠ هى ....

٢ إذا كان (−١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

٣ مجموعة حدها الأدنى ٦ وحدها الأعلى ١٠ يكون مركزها ....

٤ نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط تعين .... على محور المجموعات.

٥ ناتج طرح − $\frac{٤}{٥}$ من $\frac{١}{٥}$ هو ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ كرة مساحة سطحها ٤ π سم^{٢} فإن طول نصف قطرها .... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢ أى مستقيم يوازى محور السينات ميله ....

(أ) غير معرف. (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

٣ إذا كان المنوال للقيم : ٢ ، ٥ ، ٣ ، س + ٢ هو ٥ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

٤ الوسيط للقيم : ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٩ ، ١ هو ....

(أ) ٩ (ب) ٧ (جـ) ٣ (د) ٥

٥ ٣ (س + ٢) = ...

(أ) ٣ س + ٢ (ب) ٣ س + ٦ (جـ) ٣ س (د) ٥ س

٦ ٤ + ٣ × ٢ = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

٣ (أ) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{٧٥} - \sqrt{٢٧} - \sqrt{١٢}$

(ب) أوجد على صورة فترة مجموعة حل المتباينة الآتية فى ح : −١ ≤ ٢ س + ١ ≤ ٥

٤ (أ) إذا كانت : س = [−٢ ، ٣] ، ص = [١ ، ٥] **أوجد باستخدام خط الأعداد :**

١ س ∩ ص ٢ س ∪ ص ٣ س − ص

(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$

١ أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان.

٢ أوجد قيمة : (س + ص) − (س ص)

٥ (أ) إذا كانت : أ(١ ، ١) ، ب(٢ ، ٣) ، جـ(٠ ، -١)

١ أوجد : ميل كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بجـ}}$

٢ هل جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ؟

(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

٦ محافظة المنوفية

ادارة منوف
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد غير النسبي المحصور بين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) ٢,٥ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{١٠}$ (د) $\sqrt[٣]{١٠}$

٢ مجموعة حل المعادلة : س^{٢} + ٤٩ = ٠ في ح هي ....

(أ) {٠} (ب) ∅ (جـ) {٧} (د) {-٧}

٣ $\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\sqrt{٦}$

٤ مكعب مساحته الكلية ١٥٠ سم^{٢} فإن حجمه .... سم^{٣}

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٥

٥ إذا كان الوسط الحسابي للقيم : ٣ ، ٤ ، س هو ٥ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٦ إذا كان المنوال للقيم : ٥ ، ٩ ، ٥ ، س + ٣ ، ٩ هو ٩ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ أكمل ما يأتي لتحصل على عبارات صحيحة :

١ ح$_{+}$ ∩ {-١ ، ٠ ، ١} = ...

٢ إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (-٣ ، ٥) ، (١ ، ك) يوازي محور السينات فإن : ك = ...

٣ إذا كان (-٣ ، ك) يحقق العلاقة : س + ٢ ص = ٥ فإن : ك = ...

٤ كرة حجمها $\frac{٤}{٣}$ π سم^{٣} فإن طول نصف قطرها ....

٥ مجموعة حدها الأدنى = ٥ ومركزها = ٨ فإن حدها الأعلى = ...

٣ (أ) إذا كانت : س = [–٣ ، ٤] أوجد مستعينًا بخط الأعداد : ح، ∩ س ، ح، ∪ س

(ب) إذا كانت النقط : أ(٤ ، –٣) ، ب(–٦ ، ٧) ، حـ(٥ ، ك) على استقامة واحدة

أوجد : قيمة ك

٤ (أ) أوجد مجموعة الحل فى ح مع التمثيل على خط الأعداد : –٥ ≤ ٣ س + ١ > ١٠

(ب) إذا كانت : أ = $\sqrt{٥}$ + ٢ ، ب = $\sqrt{٥}$ – ٢ أوجد قيمة : $\frac{أ + ب}{أ ب}$

٥ (أ) مثل بيانيًا العلاقة : ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

(ب) من التوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	ك	٢	٢٠

١ أوجد قيمة ك ٢ أوجد الوسط الحسابى.

٧ محافظة الغربية

إدارة زفتى
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ضعف مربع العدد $\frac{١}{٢}$ هو ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٢ إذا كان : $\sqrt{أ^٢}$ = ٩ فإن : أ = ... حيث أ ∈ ن

(أ) ٣ (ب) ± ٣ (جـ) ٩ (د) ± ٩

٣ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات ....

(أ) صفر (ب) –١ (جـ) ١ (د) غير معرف.

٤ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٥ الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٢ – أ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٣ + أ هو ....

(أ) ١٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٦ إذا كان المنوال للقيم : ٢ ، ٨ ، ٤ ، س + ٥ هو ٨ فإن : س = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

٢ أكمل ما يلى لتحصل على عبارات صحيحة :

١ مجموعة الحل فى ح للمعادلة : س^٢ + ٤ = ٠ هى ....

٢) إذا كان : أ + ب + حـ = $\frac{٧}{٢}$ ، أ + ب = $\frac{٥}{٢}$ ، ب + حـ = $\frac{٤}{٣}$ فإن : قيمة ب = ...

٣) الزوج المرتب (٣ ، ....) يحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥

٤) المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[٣]{-٨}$ هو ....

٥) إذا كان الحد الأعلى لمجموعة ١٤ ومركزها ٩ فإن حدها الأدنى ....

٣ (أ) إذا كانت (٣ ل ، ل) تحقق العلاقة : ٣ س − ٤ ص = ١٥ **فأوجد : قيمة ل**

(ب) إذا كانت : س = [٢ ، ∞[، ص = [−١ ، ٤] **فأوجد مستعينًا بخط الأعداد :**

١) س ∩ ص ٢) ص − س

٤ (أ) إذا كانت : س = $\frac{٣\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}}$ ، ص = $\frac{٢\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ **فأوجد فى أبسط صورة : س^{٢} + ص^{٢}**

(ب) إذا كان ارتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها ، أوجد ارتفاع الأسطوانة علمًا بأن حجمها ٢٧ π سم^{٣}

٥ (أ) **اختصر لأبسط صورة :** ٢ $\sqrt{١٨}$ + $\sqrt{٥٠}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٦٢}$ − $\sqrt{٣٢}$

(ب) **الجدول التكرارى الآتى يبين التوزيع التكرارى لعدد أيام الأجازات بأحد المصانع لعدد ٥٠ عاملًا :**

المجموعات	٢ −	٦ −	١٠ −	١٤ −	١٨ −	٢٢ −	٢٦ −
التكرار	٤	٥	٨	٢٠	٧	٥	١

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

٨ محافظة الدقهلية

إدارة شرق المنصورة
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية : *(يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)*

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١) العدد غير النسبى المحصور بين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٥}$ (د) ٢ $\frac{١}{٢}$

٢) المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

(أ) − $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) −٢ $\sqrt{٣}$

٣) متوازى المستطيلات الذى أبعاده $\sqrt{٢}$ سم ، $\sqrt{٣}$ سم ، $\sqrt{٦}$ سم يكون حجمه .... سم^{٣}

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٦}$ (جـ) ٣٦ (د) $\sqrt{١١}$

٤ إذا كان الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم هو ....

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

٥ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، أ) ، (٥ ، ب) يساوى صفر فإن : ....

(أ) أ < ب (ب) أ > ب (جـ) أ = ب (د) غير ذلك.

٦ إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢ س هو ٤ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ أكمل كلًا مما يأتى :

١ مجموعة حل المعادلة : ٢٥ $س^٢$ − ٤ = ٠ فى ن هى ....

٢ باقى طرح −٥ س من ٣ س يساوى ....

٣ المستقيم العمودى النازل من نقطة تلاقى المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل على الأفقى يعين ....

٤ إذا كان (−١ ، ٥) يحقق العلاقة : ٣ س + ك ص = ٧ فإن : ك = ...

٥ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ ومركزها هو ١٥ فإن حدها الأعلى هو ....

٣

(أ) إذا كانت : س = [−٢ ، ٣] ، ص = [١ ، ٥[أوجد مستعينًا بخط الأعداد :

١ س ∩ ص ٢ س ∪ ص ٣ ص − س

(ب) ١ اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{٨}$ − ٢ $\sqrt{١٨}$ + ٢ $\sqrt{\frac{١}{٢}}$ (مع كتابة خطوات الحل)

٢ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٢ π سم٣ وارتفاعها ٨ سم. أوجد مساحتها الجانبية بدلالة π

٤

(أ) إذا كانت : س = $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٧}$ − $\sqrt{٣}$ أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان

ثم أوجد قيمة : س ص

(ب) أوجد فى ح على صورة فترة مجموعة حل المتباينة : −٣ ≤ ٢ س − ١ ≤ ٥ ومثل الحل على خط الأعداد.

٥

(أ) مثل بيانيًا العلاقة : ٢ س − ص = ٣ ثم أوجد ميل الخط المستقيم الممثل للعلاقة.

(ب) باستخدام التوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	١٠ −	٣٠ −	٥٠ −	٧٠ −	٩٠ −	المجموع
التكرار	٤	٦	م	٧	٥	٣٠

١ أوجد قيمة م

٢ أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

٩ محافظة الإسماعيلية

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ العدد ٤٥ × ١٣ يزيد عن العدد ٤٥ × ١٢ بمقدار ....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٤٥ (د) ١٣

٢ ترتيب الوسيط لمجموعة القيم : ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ هو ....

(أ) الثالث. (ب) الرابع. (جـ) الخامس. (د) السادس.

٣ مجموعة حل المعادلة : $س^2 + 9 =$ صفر في ح هي ....

(أ) {٣} (ب) {-٣} (جـ) {-٣ ، ٣} (د) $\emptyset$

٤ إذا كانت نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط (٣٠ ، ٢٠) فإن مجموع التكرارات ....

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٦٠

٥ إذا كان (٢ ، ٧) يحقق العلاقة : ص − س = ك فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) −٥ (د) ١٤

٦ مركز المجموعة الأولى من المجموعات : ٧- ، ١٣- ، ١٩- ، ٢٥- هو ....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٣

٢ أكمل العبارات التالية لتحصل على عبارات رياضية صحيحة :

١ [١ ، ٨] − {١ ، ٨} = ...

٢ إذا كان ميل مستقيم هو صفر فإن المستقيم يوازي محور ....

٣ إذا كانت : {٢ ، ٤} ⊂ {٦ ، ٢ ، س + ١} فإن : س = ...

٤ $\frac{٢}{٤}$ ، $\frac{٣}{٩}$ ، $\frac{٤}{١٦}$ ، .... (بنفس النمط)

٥ إذا كان المنوال للقيم : ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، أ − ٤ هو ٧ فإن : أ = ...

٣ (أ) اختصر لأبسط صورة : $(\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٢٥}) + ٢\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٣٢}$

(ب) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٤٠ π سم^3 وارتفاعها ١٠ سم. أوجد طول نصف قطر قاعدتها.

٤ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة الآتية في ح : ٣ > ٤ س − ١ ≥ ١٥ ثم مثل الحل على خط الأعداد.

(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{٧} + \sqrt{٥}$ ، ص = $\sqrt{٧} - \sqrt{٥}$

فأوجد في أبسط صورة قيمة المقدار : $\left(\frac{س + ص}{س ص}\right)^2$

٥ (أ) ملأ شخص خزان سيارته بالوقود والشكل المقابل يمثل العلاقة بين الزمن (س) بالساعة وكمية الوقود (ص) باللتر.



أوجد : [١] أكبر سعة للخزان.

[٢] متى يفرغ الخزان.

[٣] متوسط استهلاك السيارة الوقود.

(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي :

المجموعات	٥ –	١٥ –	٢٥ –	٣٥ –	٤٥ –	المجموع
التكرار	٤	٦	٣	٢	٥	٢٠

١٠ محافظة كفر الشيخ

إدارة دسوق
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان المنوال للقيم : ٨ ، ٩ ، ٢ ، ٢ س ، ٣ هو ٨ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) ٣

[٢] إذا كان حجم مكعب = ٦٤ سم^{٣} فإن مجموع أطوال أحرفه = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦٤ (جـ) ٤٨ (د) ١٠٠

[٣] المعكوس الضربي للعدد ٢ + $\sqrt{٣}$ هو ....

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) ٢ + $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ − $\sqrt{٣}$ (د) −٢ $\sqrt{٦}$

[٤] ٥ متر = ... سم

(أ) ٥٠٠٠ (ب) ٥٠٠ (جـ) ٥٠ (د) ٥

[٥] العدد غير النسبى المحصور بين العددين ٢ ، ٣ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٤}$ (جـ) $\sqrt{٦}$ (د) $\sqrt{٩}$

[٦] إذا كان : $\sqrt[٣]{س}$ = ٥ فإن : س = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٥ (جـ) ١٢٥ (د) ٦٢٥

٢ أكمل ما يأتى :

[١] إذا كان الوسط الحسابى لستة قيم هو ٥ فإن مجموع هذه القيم يساوى ....

[٢] ميل المستقيم الموازى لمحور السينات هو ....

[٣] الوسيط للقيم : ٨ ، ١٣ ، ٦ ، ١٠ ، ٥ ، ١١ هو ....

٤ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو ٤ فإن عدد هذه القيم يساوى ....

٥ إذا كان الزوج المرتب (ك ، ٥) يحقق العلاقة : س + ص = ٥ فإن : ك = ...

٣ (أ) إذا كانت : س = [-١ ، ٤] ، ص = [٢ ، ٧[أوجد مستعيناً بخط الأعداد :

١ س ∪ ص ٢ ص ∩ س

(ب) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} + ٢\sqrt{٢٤}$

٤ (أ) إذا كانت : س = $\sqrt{٧} - \sqrt{٢}$ ، ص = $\frac{٥}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار : $(س + ص)^٢$

(ب) كرة طول نصف قطرها ٧ سم. أوجد حجمها ومساحة سطحها.

٥ (أ) أوجد زوجين مرتبين يحققان العلاقة : ٢ س + ص = ١١

(ب) الجدول الآتى يبين الأجر اليومى لعدد ٥٠ عاملاً :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٦	١١	١٢	١٣	٨	٥٠

أوجد الوسط الحسابى لهذا التوزيع.

١١ محافظة الفيوم

إدارة غرب الفيوم

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ $\sqrt{٤} - \sqrt[٣]{٨}$ = ...

(أ) ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ (د) ± ٤

٢ حجم متوازى المستطيلات الذى أبعاده ٣ سم ، ٢ سم ، ٤ سم يساوى .... $سم^٣$

(أ) ٢٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

٣ [٢ ، ٧] - {٢ ، ٧} = ...

(أ) [١ ، ٦] (ب) ∅ (جـ)]٢ ، ٧[(د) {٠}

٤ المنوال للقيم : ٥ ، ٧ ، ٦ ، ٩ ، ٦ هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٤

٥ المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{3}}{6}$ يساوى ....

(أ) $\sqrt{3}$ (ب) ٢ (جـ) ٢$\sqrt{3}$ (د) ٦$\sqrt{3}$

٦ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٧) يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان ثمن شراء ٤ قمصان هو س فإن ثمن ٤٠ قميصًا يساوى ....

٢ $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) =$ ....

٣ الوسط الحسابى للقيم : ٨ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ١١ هو ....

٤ ٧٥ ٪ منَ العدد ٨٠ يساوى ....

٥ الوسيط للقيم : ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٧ ، ٣ هو ....

٣ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة الآتية : ٣ س − ٥ ≤ س + ١ < ٣ س − ١ مستخدمًا خط الأعداد.

(ب) إذا كانت : س = $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ، ص = $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ احسب قيمة : $\frac{س + ص}{س ص}$

٤ (أ) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{27}$

(ب) إذا كانت : س = [−٣ ، ٣] ، ص = [−١ ، ٥] أوجد مستعينًا بخط الأعداد : س ∩ ص

٥ (أ) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = س + ٢ ثم مثلها بيانيًا.

(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	٠ −	٢ −	٤ −	٦ −	٨ −	المجموع
التكرار	٣	٤	٥	٦	٢	٢٠

١٢ محافظة المنيا

إدارة المنيا
مدارس المنيا القومية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت النقطة (أ ، ١) تحقق العلاقة : س + ص = ٥ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ إذا كان الوسط الحسابى للقيم : ١٨ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٢ك − ١ ، ك هو ١٨ فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) ٧ (جـ) ٢٩ (د) ٩٠

٣ إذا كان طول نصف قطر كرة يساوى ٦ سم فإن حجمها يساوى ....

(أ) ٦ π سم^3 (ب) ٣٦ π سم^3 (جـ) ٧٢ π سم^3 (د) ٢٨٨ π سم^3

٤ المعكوس الجمعى للعدد | -٢ | يساوى ....

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) -$\frac{١}{٢}$

٥ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٢) يساوى ....

(أ) غير معرف. (ب) $\frac{٤}{٧}$ (جـ) صفر (د) $\frac{١}{٧}$

٦ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) ١٠

---

٢ أكمل ما يأتى :

١ المجموعة التى حدها الأدنى ٤ وحدها الأعلى ٨ يكون مركزها ....

٢ [٣ ، ٤] - {٣ ، ٥} = ...

٣ أى مستقيم يوازى محور الصادات ميله ....

٤ أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم^3 وارتفاعها ١٠ سم فإن طول قطر قاعدتها ....

٥ المنوال لمجموعة القيم : ٣ ، ٦ ، ٤ ، ٧ ، ٣ يساوى ....

---

٣ (أ) أوجد قيمة : $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٤} - ٣\sqrt{٢} - \frac{١}{٢}\sqrt{٢٤}$

(ب) إذا كان : س = $\frac{٣}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}$ ، ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

أثبت أن : س ، ص عددان مترافقان وأوجد قيمة : س ص

---

٤ (أ) أوجد مجموعة حل المتباينة : -٢ > ٣ س + ٧ ≥ ١٠ فى ح مع تمثيل فترة الحل على خط الأعداد.

(ب) أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ٢ س + ص = ٥ ومثلها بيانيًا.

---

٥ (أ) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، -١) ، (٧ ، ك) يساوى $\frac{٣}{٤}$ أوجد : ك

(ب) أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

١٣ محافظة أسيوط

إدارة أسيوط – توجيه الرياضيات - صباحى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الشرط اللازم لكى يكون $\frac{٥}{س - ٣}$ عددًا نسبيًا هو س ≠ ....

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) −٥

٢ أصغر عدد أولى فردى هو ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ٣ (د) ٢

٣ العدد غير النسبى المحصور بين ٣ ، ٤ هو ....

(أ) ٣٫٥ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) $\sqrt{١٠}$

٤ العلاقة : س + ص = ٥ يحققها الزوج المرتب ....

(أ) (−٣ ، ١) (ب) (١ ، ٣) (جـ) (٢ ، ٣) (د) (٥ ، ٣)

٥ إذا كان المنوال للقيم : ٤ ، ١١ ، ٨ ، ٢ س هو ٨ فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ٦

٦ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ١٠ والحد الأعلى لها هو س ومركزها هو ١٥ فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٢ أكمل ما يأتى لتحصل على عبارات صحيحة :

١ مجموع الجذرين التربيعيين للعدد $\frac{٢٥}{١٦}$ يساوى ....

٢ مكعب حجمه ٦٤ سم^{٣} فإن طول حرفه يساوى ....

٣ أى مستقيم يوازى محور السينات ميله هو ....

٤ ترتيب الوسيط لجدول تكرارى يساوى مجموع التكرارات على ....

٥ الوسط الحسابى للقيم : ٥ ، ٧ ، ٣ ، ١٠ ، ١٥ هو ....

٣ (أ) إذا كانت : س = [−٢ ، ٣] ، ص = [١ ، ٥[

أوجد مستعينًا بخط الأعداد على صورة فترة : س ∩ ص ، س ∪ ص ، س − ص

(ب) أسطوانة دائرية قائمة حجمها يساوى ٧٢ π سم^{٣} وارتفاعها ٨ سم. أوجد بدلالة π مساحتها الجانبية.

٤ (أ) اختصر لأبسط صورة : $\sqrt{٣٢} - \sqrt{٧٢} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

(ب) إذا كان (٣ ، −٧) يحقق العلاقة : ٥ س + ب ص = ١٨ أوجد : قيمة ب

٥ (أ) إذا كانت : س = $\sqrt{٧}$ + ٧ ، ص = $\sqrt{٧}$ − ٧ أوجد قيمة : $(س + ص)^٢$

(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكراري لدرجات ٤٠ طالبًا :

المجموعات	٢ −	٦ −	١٠ −	١٤ −	١٨ −	٢٢ −	٢٦ −
التكرار	٣	٥	٨	١٠	٧	٥	٢

١٤ محافظة قنا

إدارة نجع حمادي
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أى مستقيم يوازى محور السينات ميله ....

(أ) موجب. (ب) سالب. (جـ) صفر (د) غير معرف.

٢ إذا كانت (٢ ، −٣) تحقق العلاقة : ٢ س − ص = ك فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) −١ (جـ) −٧ (د) صفر

٣ نصف العدد $\sqrt{٨}$ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ (د) ٢

٤ مكعب حجمه ٢٧ سم^٣ فإن طول حرفه .... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٥ إذا كانت النقطة (١٦ ، ٣٠) هى نقطة تقاطع المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط فإن الوسيط يساوى ....

(أ) ١٦ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٠ (د) ٤٦

٦ مربع ضعف العدد نصف هو ....

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٢ أكمل كلًا مما يأتى :

١ {٢ ، ٤ ، ٥} − [٢ ، ٥] = ...

٢ $(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$ = ...

٣ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة ٤ وحدها الأعلى ١٢ فإن مركزها ....

٤ إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ٨ ، ٦ ، ٢ س ، ٥ هو ٨ فإن : س = ...

٥ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات ٤ طلاب هو ٢٠ فإن مجموع درجاتهم يساوى ....

٣ (أ) إذا كانت : س = [-٢ ، ٤] ، ص =]١ ، ٨[

أوجد مستعيناً بخط الأعداد : س ∪ ص ، س ∩ ص

(ب) اختصر : $\sqrt[3]{٥٤} + \sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢٥٠}$

٤ (أ) أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : ٢ س − ١ ≥ ٧ ومثلها على خط الأعداد.

(ب) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ (٣ ، ٧) ، ب (١ ، −١)

٥ (أ) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٣٥٢ سم^3 وارتفاعها ٧ سم، أوجد طول نصف قطر قاعدتها. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(ب) الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لأوزان ٣٠ طفلاً بالكيلو جرام :

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

أوجد الوسط الحسابي لهذا التوزيع.

١٥ محافظة أسوان

إدارة أسوان
مدرسة الفصول الملحقة بنات

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ$^{-1}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن : أ = ...

(أ) $-\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٣}{٢}$ (د) ١

٢ المعكوس الضربي للعدد $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ هو ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٦ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

٣ إذا كان (ك ، ٢ ك) يحقق العلاقة : س + ص = ١٥ فإن : ك = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٣ (د) ١٥

٤ الوسيط للقيم : ٧ ، ٩ ، ١٥ ، ١١ ، ٣ ، ٥ هو ....

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٩ (د) ١٣

٥ إذا كان المنوال لمجموعة القيم : ٤ ، ١٢ ، ٨ ، ٢ س هو ١٢ فإن : س = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

٦ باقى طرح -٥ س من ٣ س هو ....

(أ) ٢ س (ب) -٢ س (جـ) ٨ س (د) -٨ س

٢ أكمل مكان النقط :

١ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

٢ ن ∪ نَ = ...

٣ إذا كان ترتيب الوسيط لمجموعة من القيم هو الرابع فإن عدد هذه القيم يساوى ....

٤ إذا كان الحد الأدنى لمجموعة هو ٨ وحدها الأعلى هو ١٢ فإن مركزها هو ....

٥ الحد الجبرى : ٣ $س^٢$ ص من الدرجة ....

٣

(أ) اختصر لأبسط صورة : ٢ $\sqrt{١٨}$ + $\sqrt{٥٠}$ + $\frac{١}{٣}$ $\sqrt{١٦٢}$

(ب) إذا كانت : س = [٢ ، ∞[، ص =]-٢ ، ٣[

أوجد : ١ س ∩ ص ٢ س ∪ ص

٤

(أ) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٥ سم وارتفاعها ٧ سم.
احسب حجم الأسطوانة. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

(ب) اكتب على صورة فترة مجموعة حل المتباينة الآتية فى ح :
٣ + ٢ س ≥ ٧ ومثل الحل على خط الأعداد.

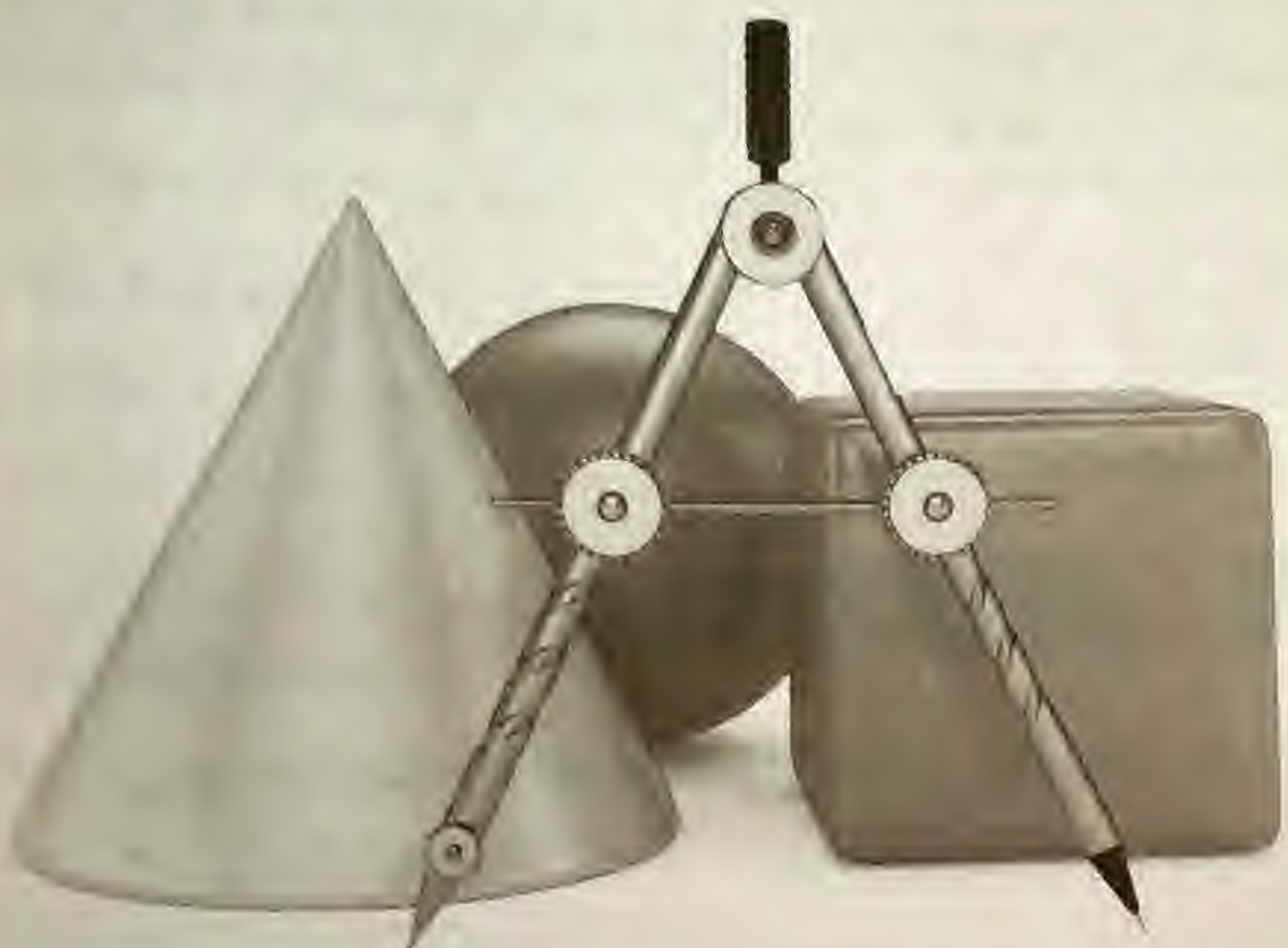
٥

(أ) إذا كانت : أ(١ ، ٣) ، ب(٢ ، ٥) ، حـ(٠ ، ١)
أثبت أن النقط أ ، ب ، حـ تقع على استقامة واحدة.

(ب) أوجد الوسط الحسابي للتوزيع التكرارى الآتى :

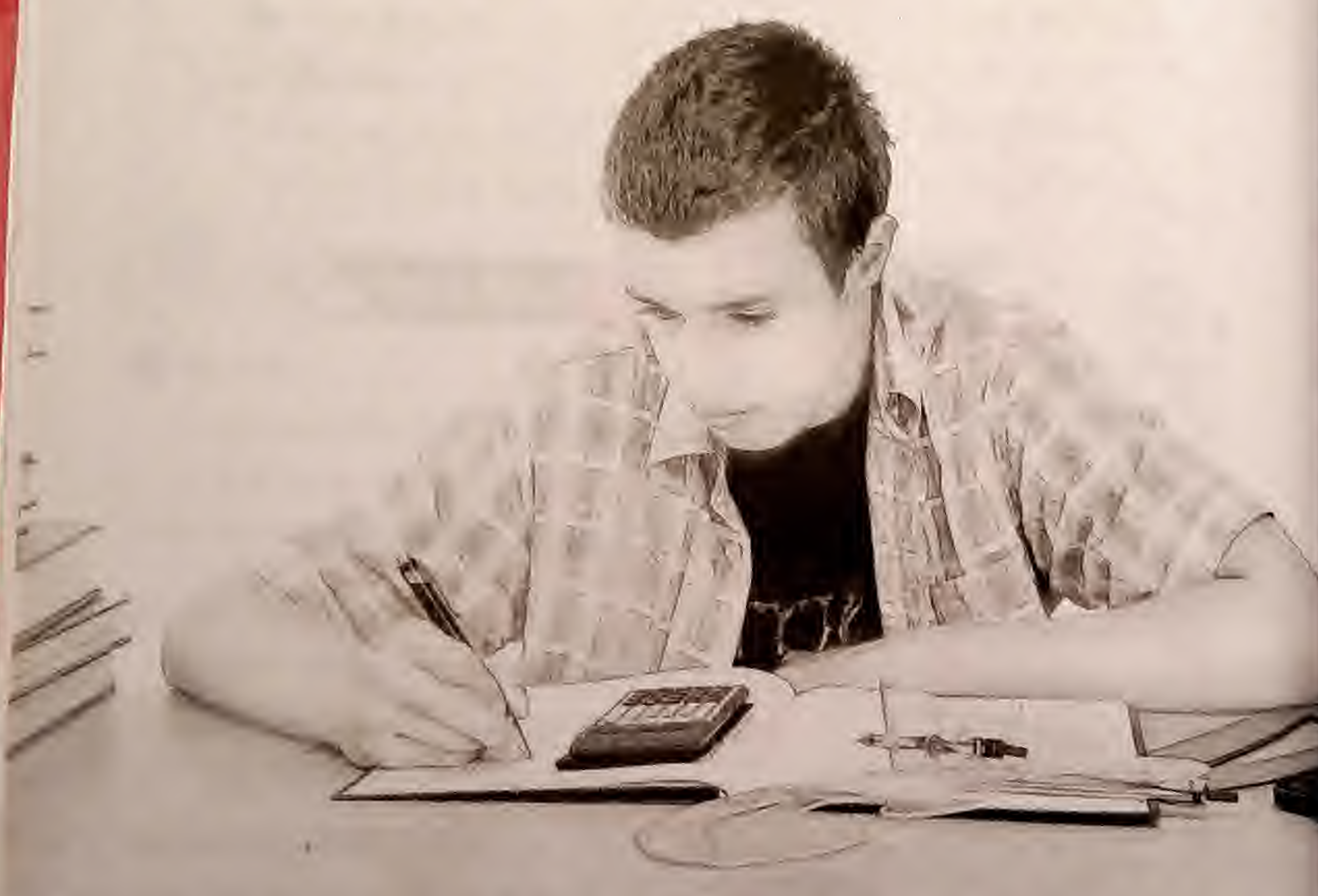
المجموعات	٥ -	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	المجموع
التكرار	٤	٥	٦	٣	٢	٢٠

ثانيًا الهندسة



الاختبارات القصيرة

فى الهندسة



اختبار قصير ١ على الدرس الأول - الوحدة الرابعة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١) متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى ....

٢) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : .... من جهة الرأس.

٣) إذا كان $\overline{اء}$ متوسطًا فى Δ ا ب ح ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ا م = ٦ سم

فإن : ا ء = ... سم.

٢ (ا) فى الشكل المقابل :



ا ب ح مثلث ، س منتصف $\overline{اب}$

، ص منتصف $\overline{اح}$ ، س م = ٤ سم

، س ص = ٥ سم ، ب ص = ١٢ سم

أوجد : محيط Δ م ب ح

(ب) فى الشكل المقابل :



ا ب ح ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{اء}$

، $\overline{به} \cap \overline{اح} = \{ن\}$ أثبت أن : ا ن = $\frac{1}{3}$ ا ح

اختبار قصير ٢ حتى الدرس الثانى - الوحدة الرابعة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى ....

٢) فى Δ ا ب ح ، $\overline{اء}$ متوسط طوله ١٢ سم ، م نقطة تقاطع المتوسطات فإن : ا م = ... سم

٣) طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى ....

٢ (ا) فى الشكل المقابل :



ا ب ح مثلث فيه : ق(∠ب) = ٩٠° ، ق(∠ح) = ٣٠°

، ا ح = ٩ سم ، $\overline{اه}$ ، $\overline{بء}$ متوسطان متقاطعان فى م

أوجد : طول كل من $\overline{بء}$ ، $\overline{بم}$ ، $\overline{اب}$

(ب) فى الشكل المقابل :



ق(∠ب ا ح) = ق(∠ب ء ح) = ٩٠° ، هـ منتصف $\overline{بح}$

أثبت أن : ا هـ = ء هـ

اختبار قصير ٣ حتى الدرس الثالث - الوحدة الرابعة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١ قياس أى زاوية خارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°

٢ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ١١٠° فإن : ق (∠ ب) = ...°

٣ إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رءوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن زاوية هذا الرأس تكون ....

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = أ حـ ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث ب ء = هـ حـ

أثبت أن : أ ء = أ هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ء = س ص = ٦ سم

، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب هـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{هـ حـ}}$

أثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠°

اختبار قصير ٤ حتى الدرس الرابع - الوحدة الرابعة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١ المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون ....

٢ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٥٠° ، ق (∠ حـ) = ٨٠°

فإن : ب حـ = ...

٣ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٩٠° فإن : ب حـ = ... أ حـ

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ ء = ء ب = هـ ب

، ق (∠ أ) = ٣٠°

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

(ب) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠°

، ق (∠ هـ) = ٣٠° ، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن : أ حـ = ب هـ

اختبار قصير ٥ حتى الدرس الخامس - الوحدة الرابعة

الزمن ثلث ساعة

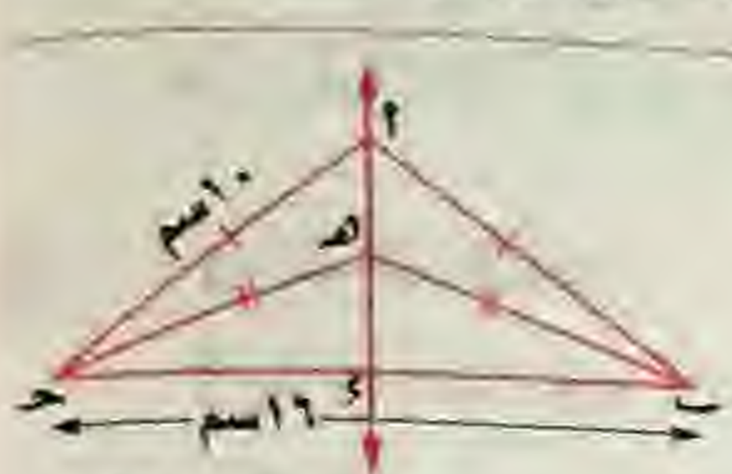
١ أكمل ما يأتى :

١ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ....

٢ إذا كان : $\overline{أء}$ متوسطًا فى Δ أ ب حـ ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن : ء م = ... أء

٣ أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين .... من طرفيها.

٢ (أ) فى الشكل المقابل :

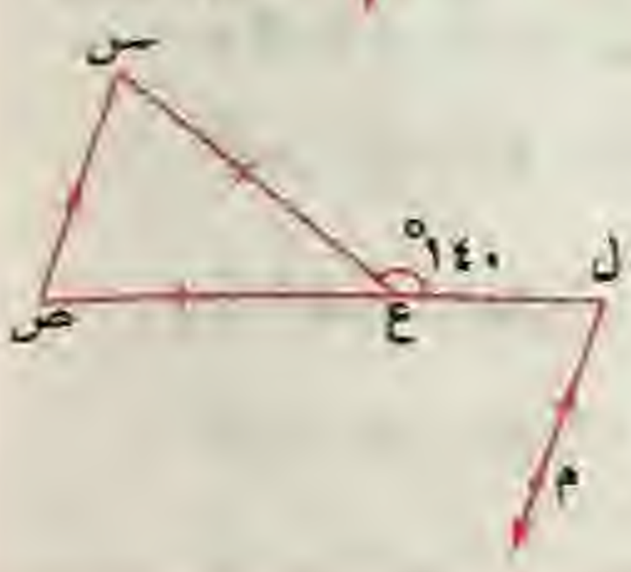


أ ب حـ مثلث ، أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب هـ = هـ حـ

، ب حـ = ١٦ سم ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ $\cap$ $\overline{ب حـ}$ = {ء}

أوجد : طول $\overline{أء}$

(ب) فى الشكل المقابل :



ع $\in$ $\overline{ل ص}$ ، س ع = ص ع

، ق (∠ ل ع س) = ١٤٠° ، $\overleftarrow{ل م}$ // $\overline{س ص}$

أوجد : ق (∠ م ل ص)

اختبار قصير ٦ حتى الدرس الأول - الوحدة الخامسة

الزمن ثلث ساعة

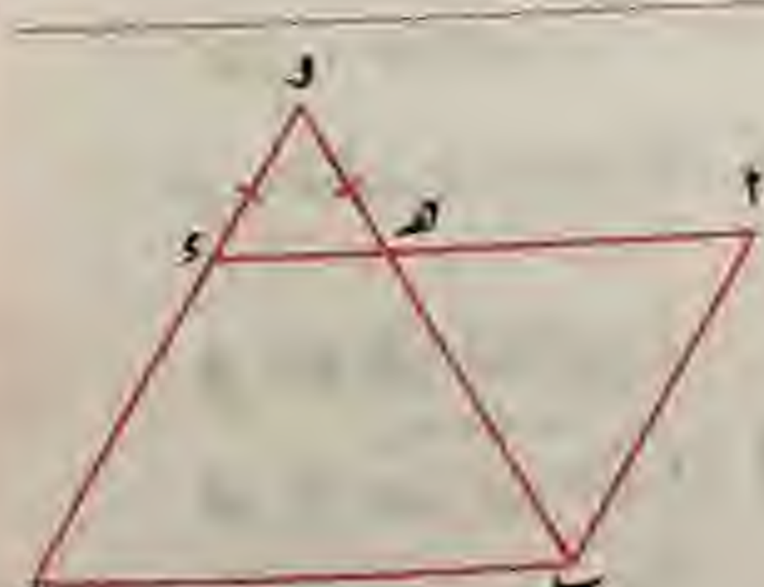
١ أكمل ما يأتى :

١ قياس أى زاوية خارجة للمثلث أكبر من ....

٢ فى Δ أ ب حـ إذا كان : $\overline{أء}$ متوسطًا ، م نقطة تقاطع متوسطاته فإن : أ م = ... أء

٣ إذا كان : س > ص ، ع < ص فإن : س .... ع

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ $\in$ $\overline{أء}$

، $\overleftarrow{ب هـ}$ $\cap$ $\overleftarrow{حـ ء}$ = {و} بحيث هـ و = ء و

أثبت أن : Δ ب أ هـ متساوى الساقين.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ

، ق (∠ ب حـ ء) > ق (∠ حـ ب ء)

أثبت أن : ق (∠ أ حـ ء) > ق (∠ أ ب ء)

اختبار قصير ٧ حتى الدرس الثانى - الوحدة الخامسة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١ إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فأكبرهما فى الطول تقابله ....

٢ المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها يكون .... لها.

٣ إذا كان Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

فإن : ق (∠ ....) > ق (∠ ....) > ق (∠ ....)

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى

أثبت أن : ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ ء حـ)

(ب) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ حـ ب هـ) = ٩٠° ، ق (∠ ب هـ حـ) = ٣٠°

، ء ، و منتصفا $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ هـ}}$ على الترتيب.

أثبت أن : أ ء = $\frac{1}{2}$ ب و

اختبار قصير ٨ حتى الدرس الثالث - الوحدة الخامسة

الزمن ثلث ساعة

١ أكمل ما يأتى :

١ أكبر الأضلاع طولًا فى المثلث القائم الزاوية هو ....

٢ إذا كان Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠° فإن أصغر الأضلاع طولًا هو ....

٣ فى Δ أ ب حـ إذا كان : أ ب = أ حـ ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب) فإن : ق (∠ حـ) = ...°

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ء حـ

، ق (∠ ب) = ٧٠° ، ق (∠ ء) = ١٠٠°

أثبت أن : ١ أ حـ > أ ب ٢ Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ١٠ سم ، ب م = ٤ سم ، حـ ء = ٩ سم

، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ على الترتيب.

أوجد : محيط الشكل أ ء م هـ

اختبار قصير ٩ حتى الدرس الرابع - الوحدة الخامسة

الزمن ثلث ساعة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان أ ب جـ مثلثًا فيه : أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٧ سم فإن : ب جـ ∈ ....

(أ) [١٣ ، ٦] (ب) [٧ ، ٦] (جـ)]١٣ ، ١[(د)]٧ ، ١[

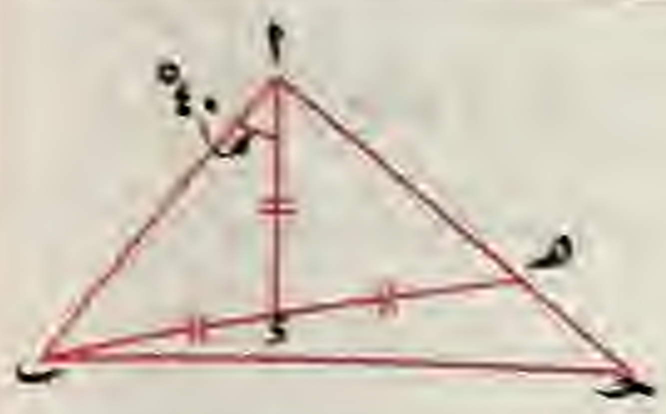
٢ مثلث متساوى الساقين قياس زاوية رأسه ١٠٠° فإن قياس إحدى زاويتى القاعدة ....

(أ) ٨٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٥٠° (د) ١٠٠°

٣ الأعداد التى تصلح كأطوال أضلاع مثلث هى ....

(أ) ٧ ، ٧ ، ١٤ (ب) ٣ ، ٤ ، ٩ (جـ) ٤ ، ٥ ، ١٢ (د) ٥ ، ٥ ، ٥

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ء = ب ء = هـ ء ، ق(∠ ء أ ب) = ٤٠°

برهن أن : ١ أ ء < أ ب ٢ ب جـ > أ جـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث فيه :

س ∈ $\overline{أب}$ ، ص ∈ $\overline{أجـ}$ ، م ∈ $\overline{س ص}$

أثبت أن : أ ب + أ جـ > م ب + م جـ

الامتحانات النهائيـة

فى الهندســــة



نمـــوذج ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو ....

(٢) إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٢ سم ، ٧ سم فإن .... < طول الضلع الثالث < ....

(٣) إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس ....

(٤) إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس فإن ....

(٥) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين = ٦٠° كان المثلث ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



Δ ا ب حـ متساوى الأضلاع

فإن : ق (∠ ا حـ ء) = ...

(ا) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

(٢) فى المثلث ا ب حـ القائم الزاوية فى ب ، إذا كان ا حـ = ٢٠ سم فإن طول المتوسط المرسوم من ب يساوى ....

(ا) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٦ سم (د) ٥ سم

(٣) س ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٧٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° فإن : ص ع .... س ص

(ا) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

(٤) الأعداد التى تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث هى ....

(ا) ٠ ، ٣ ، ٥ (ب) ٣ ، ٣ ، ٥ (جـ) ٣ ، ٣ ، ٦ (د) ٣ ، ٣ ، ٧

(٥) المثلث الذى فيه قياسا زاويتين ٤٢° ، ٦٩° يكون ....

(ا) متساوى الساقين. (ب) متساوى الأضلاع. (جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

(٦) فى الشكل المقابل :



ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ ا) ، ب حـ = ٦ سم

فإن : ا حـ = ... سم

(ا) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

٣ **(أ)** أكمل :

Δ أ ب جـ فيه : أ ب > أ جـ فإن : ق (∠ جـ) .... ق (∠ ب)

(ب) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ) = ٥٠° ، أ ب = أ جـ

، Δ ء ب جـ متساوى الأضلاع

أوجد : ق (∠ أ ب ء)

(جـ) فى الشكل المقابل :



أ ء // ب جـ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء أ جـ) = ٥٠°

أثبت أن : ب جـ > أ جـ

٤ **(أ)** برهن أن : زاويتى القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ ، ب ء ينصف ∠ ب ، جـ ء ينصف ∠ جـ

أثبت أن : Δ ء ب جـ متساوى الساقين.

٥ **(أ)** فى الشكل المقابل :



رتب زوايا Δ أ ب جـ

ترتيبًا تنازليًا حسب القياس.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب > ب جـ

، س ص // ب جـ

أثبت أن : أ س > س ص

نمـــوذج ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المثلث الذى له ثلاثة محاور تماثل هو المثلث ....

(أ) المختلف الأضلاع. (ب) المتساوى الساقين. (جـ) القائم الزاوية. (د) المتساوى الأضلاع.

(٢) مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوى (د) ضعف

٣ مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ١٢

٤ إذا كان Δ ا ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ١٣٠° فإن أكبر أضلاعه طولاً هو ....

(أ) $\overline{\text{ب حـ}}$ (ب) $\overline{\text{ا حـ}}$ (جـ) $\overline{\text{ا ب}}$ (د) متوسطه.

٥ Δ س ص ع متساوى الساقين فيه : ق (∠ س) = ١٠٠° فإن : ق (∠ ص) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٠°

٦ فى الشكل المقابل :



س + ص = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٤٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٨٠°

٢ أكمل ما يأتى :

١ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم الزاوية يساوى ٤٥° كان المثلث ....

٢ طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع طولى الضلعين الآخرين.

٣ إذا كانت : $\overline{\text{ا ب}}$ ≡ $\overline{\text{س ص}}$ فإن : ا ب = ...

٤ فى Δ ا ب حـ إذا كان : ق (∠ ا) = ٣٠° ، ق (∠ ب) = ٩٠° فإن : ب حـ = ... ا حـ

٥ محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم .... من منتصفها.

٣ (أ) المثلث ا ب حـ فيه : ا ب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم ، ا حـ = ٦ سم

رتب تصاعديًا قياسات زواياه.

(ب) فى الشكل المقابل :



Δ ا ب حـ قائم الزاوية فى ب

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ا حـ = ٩ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ا ب حـ) = ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠° ،

، ق (∠ هـ) = ٣٠°

، ء منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

أثبت أن : ا حـ = ب هـ

(ب) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء أ حـ) = ٣٠°

أثبت أن : أ حـ > ب حـ



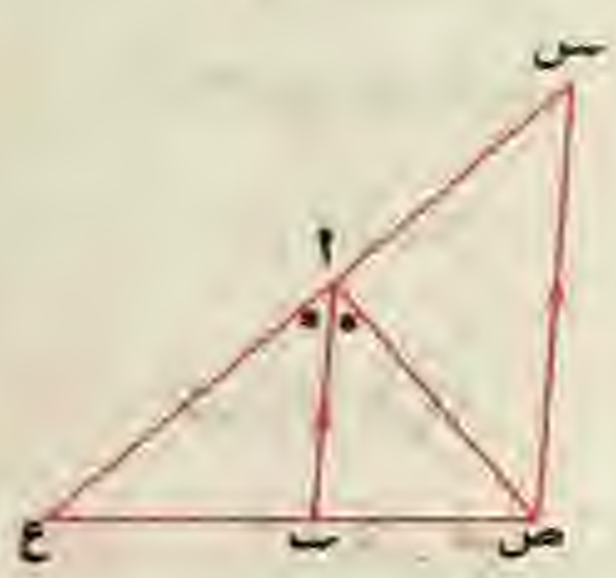
٥ (أ) أكمل : إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ....

(ب) فى الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ // $\overline{س ص}$

، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ينصف ∠ ص أ ع

برهن أن : س ع > ص ع



نموذج امتحان للطلاب المدمجين

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل العبارات التالية :

١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : .... من جهة القاعدة.

٢ فى المثلث القائم الزاوية طول المتوسط الخارج من رأس القائمة يساوى ....

٣ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

٤ Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٧٠° ، ق (∠ حـ) = ٥٠° فإن : أ حـ .... أ ب

٥ متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس يكون .... على القاعدة.

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع فإن : ق (∠ ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٧٠° (د) ٩٠°

٢ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) ٢

٣ إذا كان قياس زاوية رأس مثلث متساوى الساقين ٨٠° فإن قياس زاوية القاعدة يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ٥٠°

(٤) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٥) Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) = ٥٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠° فإن أكبر الأضلاع طولاً ....

(أ) $\overline{أب}$ (ب) $\overline{بجـ}$ (جـ) $\overline{أجـ}$

٣ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ جـ) = ٣٠° ، أ ب = ٥ سم

أوجد : طول $\overline{أجـ}$

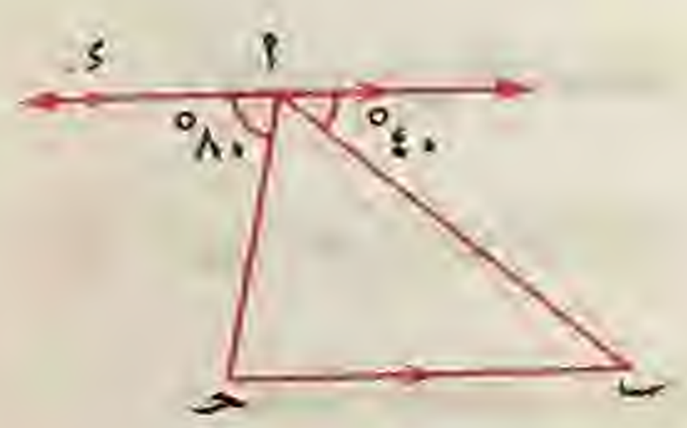
∵ ق (∠ ب) = ...° ، ق (∠ جـ) = ...°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ × .... ∴ أ جـ = ... سم

٤ (أ) Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٧٥° ، ق (∠ جـ) = ٦٥°

رتب أطوال أضلاع المثلث تنازليًا.

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أء}$ // $\overline{بجـ}$

أكمل :

(١) ق (∠ ب) = ...°

(٢) الضلع .... هو أطول أضلاع Δ أ ب جـ

٥ فى الشكل المقابل :



أ ب = أ جـ = جـ ء = أ ء = ١٠ سم

، ق (∠ ب أ جـ) = ٧٠°

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

(١) ق (∠ ب) = ٥٥° ( )

(٢) ق (∠ ء) = ٧٠° ( )

(٣) ق (∠ ء جـ ب) = ١٢٠° ( )

(٤) أ ب + أ ء = ٢٠ سم ( )

(٥) أ ب + ب جـ = ب جـ + جـ ء ( )

امتحانات بعض مدارس المحافظات في الهندســة

١ محافظة القاهرة

إدارة الوايلي
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، أ ب = ب جـ فإن : ق (∠ أ) = ... °

(أ) ٩٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

٢ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٣ : ٢ (د) ٢ : ٣

٣ المثلث الذي فيه قياسا زاويتين ٥٥° ، ٧٠° يكون ....

(أ) متساوي الساقين. (ب) متساوي الأضلاع.

(جـ) مختلف الأضلاع. (د) قائم الزاوية.

٤ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوي الأضلاع يساوي .... °

(أ) ١٨٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٣٦٠

٥ مثلث متساوي الساقين فيه ضلعان طولاهما ٨ سم ، ٤ سم يكون طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٤ (ب) ١٢ (جـ) ٨ (د) ٢٤

٦ إذا كانت : جـ ∈ محور تماثل $\overline{\text{أ ب}}$ فإن : ....

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (ب) أ جـ = ب جـ

(جـ) أ جـ = أ ب (د) أ جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

٢ أكمل ما يأتي :

١ متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا في ....

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ ع) = ٥٠° ، ق (∠ ص) = ٦٠° فإن : ص ع .... س ص

٣ مثلث أ ب جـ فيه : أ ب > أ جـ فإن : ق (∠ جـ) .... ق (∠ ب)

٤ في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين .... من طول الضلع الثالث.

٥ إذا كان طولا ضلعين في مثلث ٤ سم ، ٩ سم فإن طول الضلع الثالث ∈] .... ، .... [

٣ (أ) في الشكل المقابل :



أ ء // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (∠ ب أ جـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء أ جـ) = ٥٠°

أثبت أن : ب جـ > أ جـ

(ب) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ء منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ حـ = ٩ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$

٤ (أ) المثلث أ ب حـ فيه : أ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٦ سم. رتب تصاعديًا قياسات زواياه.

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

، ص منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، س ص = ٥ سم

، $\overline{\text{س حـ}} \cap \overline{\text{أ ص}}$ = {م} حيث حـ م = ٨ سم ، ص م = ٣ سم

أوجد : محيط Δ أ م حـ

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ) = ٥٠° ، أ ب = أ حـ

، Δ ب ء حـ متساوى الأضلاع

أوجد : ق (∠ أ ب ء)

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب > أ حـ

، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

برهن أن : ق (∠ أ ص س) > ق (∠ أ س ص)

٢ محافظة الجيزة

إدارة بولاق الدكرور
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى .... °

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

٢ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١

٣ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

(أ) ربع　(ب) نصف　(ج) ثلث　(د) ضعف

٤ مثلث متساوى الساقين قياس زاوية رأسه = ٨٠° فإن قياس زاوية قاعدته = ...°

(أ) ١٠　(ب) ٤٠　(ج) ٥٠　(د) ١٠٠

٥ مثلث طولا ضلعين فيه ٤ سم ، ٩ سم له محور تماثل واحد فإن طول ضلعه الثالث .... سم.

(أ) ٤　(ب) ٩　(ج) ٥　(د) ١٣

٦ فى المثلث أ ب ح القائم الزاوية فى ب إذا كان : أ ح = ٢٠ سم فإن طول المتوسط المرسوم من ب يساوى .... سم.

(أ) ١٠　(ب) ٨　(ج) ٦　(د) ٥

---

٢ أكمل ما يأتى :

١ متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى ....

٢ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

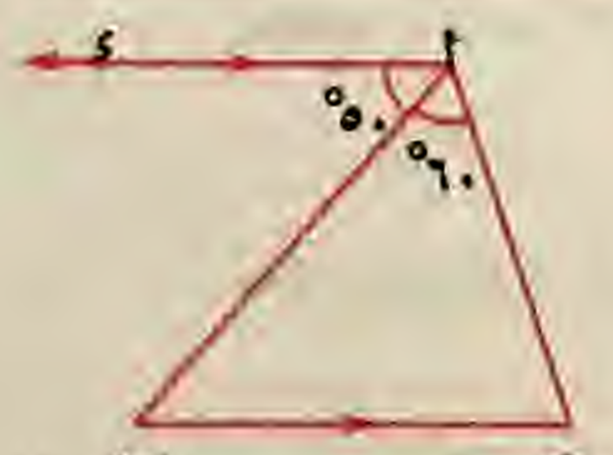
٣ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

٤ أكبر الأضلاع طولاً فى المثلث القائم الزاوية هو ....

٥ فى المثلث أ ب ح إذا كان : أ ب > أ ح　فإن : ق(د ب) .... ق(د ح)

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



أ د // ح ب ، ق(د د أ ب) = ٥٠°

، ق(د ب أ ح) = ٦٠°

أثبت أن : أ ب > أ ح

(ب) فى الشكل المقابل :



أوجد : طول كل من أ ح ، ب د ، أ د

، ومحيط المثلث أ ب د

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح

، د هـ // ب ح

أثبت أن : المثلث أ د هـ متساوى الساقين.

(ب) أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٧ سم ، ب ح = ٥ سم ، أ ح = ٨ سم

رتب قياسات زوايا المثلث تصاعديًا.

٥ (أ) في الشكل المقابل :

$\overline{بـ هـ}$ ، $\overline{حـ ء}$ متوسطان في المثلث ا ب حـ

، حـ ء = ٩ سم

، ب م = ٨ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ء م}$ ، $\overline{م هـ}$



(ب) في الشكل المقابل :

ا ب ء مثلث متساوى الأضلاع

، ب حـ = حـ ء ، ق (∠ حـ) = ٩٠°

أوجد بالبرهان : ق (∠ ا ب حـ)



٢ محافظة الإسكندرية

إدارة وسط
توجيه الرياضيات - صباحي (١)

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ....

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ٢٧٠°

٢ مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ٨

٣ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة القاعدة.

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١

٤ إذا كان : ٣ سم ، ٥ سم طولى ضلعين فى مثلث فإن طول الضلع الثالث ∈ ....

(أ)]٣ ، ٥[(ب)]٢ ، ٥[(جـ)]٢ ، ٨[(د)]٥ ، ٨[

٥ مثلث متساوى الساقين قياس إحدى زواياه ٦٠° فإن عدد محاور تماثل هذا المثلث ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٤

٦ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٢ أكمل ما يأتى :

١ مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة واحدة يساوى ....°

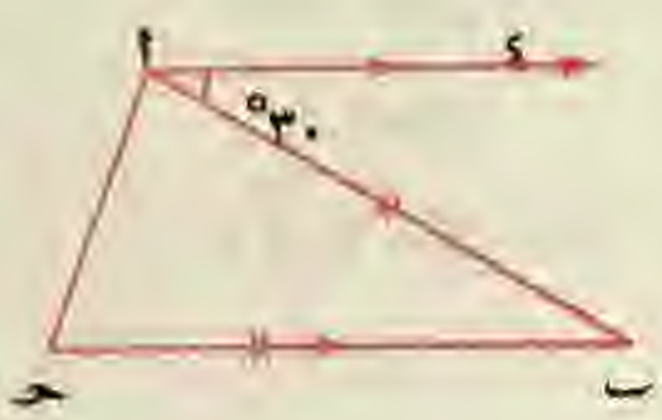
[٢] طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

[٣] إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس .... فى القياس.

[٤] المستقيم العمودى على قطعة مستقيمة من منتصفها يسمى .... القطعة المستقيمة.

[٥] أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية هو ....

[٣] (أ) فى الشكل المقابل :

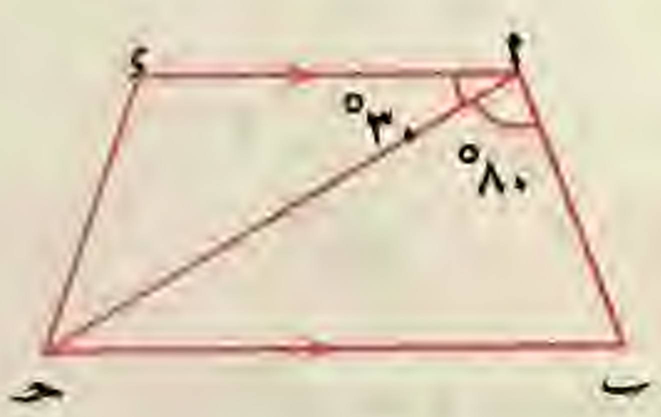


ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ب حـ

، ا ء // ب حـ ، ق (∠ ء ا ب) = ٣٠°

أوجد : قياسات زوايا المثلث ا ب حـ الداخلة.

(ب) فى الشكل المقابل :



ا ء // ب حـ ، ق (∠ ب ا حـ) = ٨٠°

، ق (∠ ء ا حـ) = ٣٠°

برهن أن : ب حـ > ا ب

[٤] (أ) فى الشكل المقابل :



Δ ا ب حـ فيه :

ق (∠ ب) = ٩٠° ، ب ء متوسط

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ا حـ = ١٠ سم

أوجد : محيط Δ ا ب ء

(ب) فى الشكل المقابل :



Δ ا ب حـ فيه :

ء هـ // ب حـ ، ا ء = ا هـ

برهن أن : ا ب = ا حـ

[٥] (أ) ا ب حـ مثلث فيه : ا ب = ٦ سم ، ا حـ = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم

رتب قياسات زوايا المثلث ترتيبًا تصاعديًا.

(ب) فى الشكل المقابل :



ء ، هـ منتصفا ا ب ، ا حـ على الترتيب

، ب حـ = ٨ سم ، ب م = ٤ سم ، م حـ = ٦ سم

أوجد : محيط Δ ء م هـ

٤ محافظة القليوبية

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طول الوتر .... طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية.
(أ) نصف (ب) ثلث (جـ) ضعف (د) ربع

(٢) ء هـ و مثلث فيه : ق(د و) = ٥٠° ، ق(د هـ) = ٧٥° فإن : هـ و .... ء هـ
(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ضعف

(٣) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.
(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٣ : ١ (د) ١ : ٣

(٤) ٢ س ، س + ٣ ، ٥ تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث متساوى الساقين عندما س = ...
(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) صفر

(٥) أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م وطول قطره ٨ سم فإن طول المتوسط $\overline{أم}$ = ... سم
(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

(٦) مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ....
(أ) ٣٦٠° (ب) ٦٣٠° (جـ) ١٨٠° (د) غير ذلك.

٢ أكمل كلًا مما يأتى :

(١) منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين .... ، ....

(٢) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، أ حـ = ٧ سم فإن : ب حـ ∋] .... ، .... [

(٣) فى المثلث القائم الزاوية يكون .... هو أطول أضلاع المثلث.

(٤) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع ....°

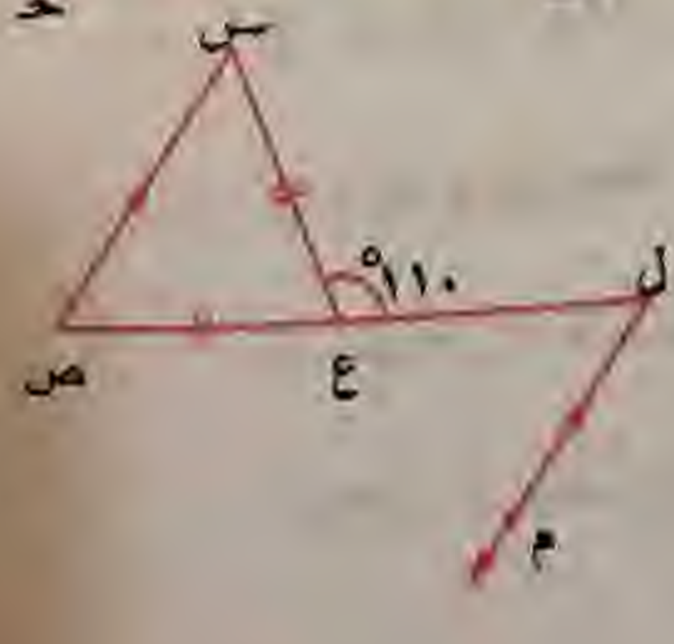
(٥) إذا كانت : $\overline{أب}$ ≡ $\overline{س ص}$ فإن : أ ب − س ص = ...

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



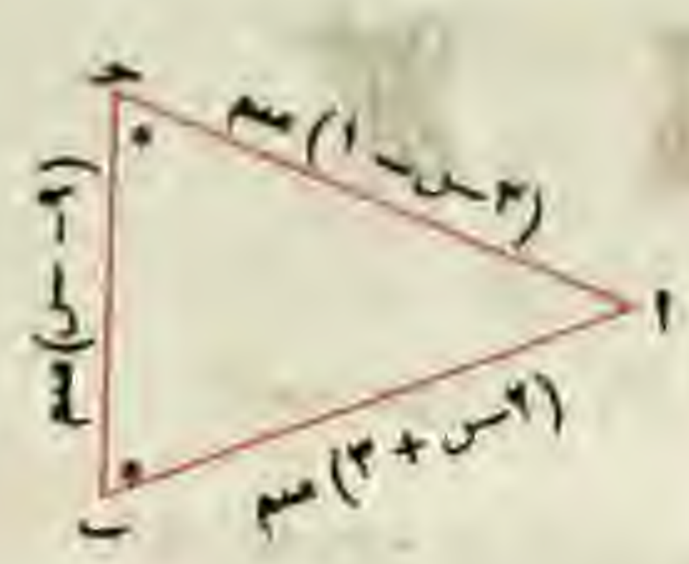
أ ب حـ مثلث ، م نقطة تلاقى المتوسطات
، م ء = ٤ سم ، م ب = ٦ سم
أوجد : طول كل من $\overline{م حـ}$ ، $\overline{أ هـ}$

(ب) فى الشكل المقابل :



ع ∋ $\overline{ل ص}$ ، س ع = ع ص
، ق(د ل ع س) = ١١٠° ، $\overleftrightarrow{ل م}$ // $\overline{س ص}$
أوجد : ق(د م ل ص)

٤ (أ) في الشكل المقابل :



ا ب ﺣ مثلث فيه : ق (∠ب) = ق (∠ﺣ)

١ أوجد : قيمة س إذا كان : ا ﺣ = (٣ س – ١) سم

، ا ب = (٢ س + ٣) سم ، ب ﺣ = (٩ – س) سم

٢ أوجد : محيط Δ ا ب ﺣ

(ب) في الشكل المقابل :



ا ﺣ ∩ ب ء = {م} ، ا ب ⊥ ب ء

، ﺣ ء ⊥ ب ء

برهن أن : ا ﺣ > ب ء

٥ (أ) ا ب ﺣ مثلث فيه : ق (∠ا) = ٥٠° ، ق (∠ب) = ٦٠°

أوجد : ق (∠ﺣ) ثم رتب تصاعديًا أطوال أضلاع المثلث.

(ب) في الشكل المقابل :



ق (∠ب) = ٩٠° ، ق (∠ب ﺣ ا) = ٣٠°

، ﻫ منتصف ا ء

، و منتصف ء ﺣ

أثبت أن : ا ب = ﻫ و

٥ محافظة الشرقية

إدارة منيا القمح

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتي :

١ أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية هو ....

٢ إذا كانت : ا ∈ محور تماثل ب ﺣ فإن : ا ب .... ا ﺣ

٣ عدد أقطار الشكل الرباعي يساوى ....

٤ إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله ....

٥ منصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين يكون .... ، ....

٦ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... : .... من جهة الرأس.

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ أقل عدد من الزوايا الحادة في أي مثلث يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (ﺟ) ٢ (د) ٣

٢ الزاوية المنفرجة تكملها زاوية ....

(أ) صفرية. (ب) مستقيمة. (جـ) حادة. (د) قائمة.

٣ ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ا ب = $\frac{1}{2}$ ا حـ فإن : ق (∠ ا) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ٤٥

٤ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٥ سم ، ٥ سم فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يساوى .... سم.

(أ) ١١ (ب) ١٠ (جـ) ٩ (د) ١٤

٥ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين يساوى .... عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع.

(أ) نصف (ب) ضعف (جـ) ثلث (د) ثلاثة أمثال

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

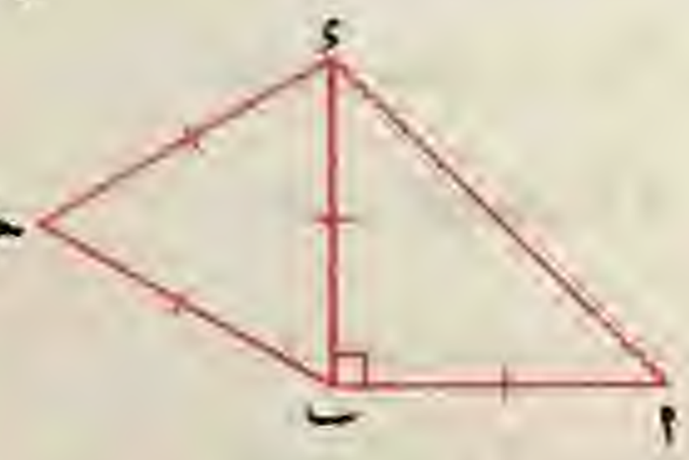


ص ع > ص س

، م ل // س ع

أثبت أن : ص ل > ص م

(ب) فى الشكل المقابل :



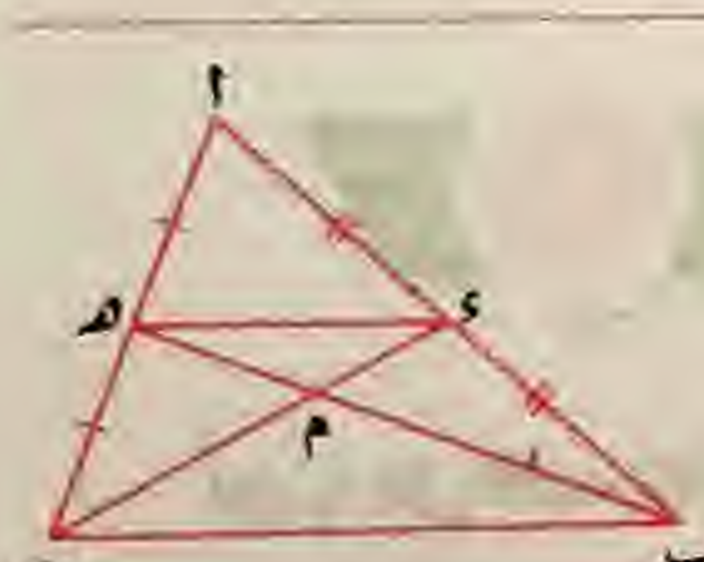
ق (∠ ا ب ء) = ٩٠° ، Δ ء ب حـ متساوى الأضلاع

، ا ب = ب ء

أوجد بالبرهان : ق (∠ ا ء حـ)

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث ، ء ، هـ منتصفا ا ب ، ا حـ على الترتيب

، ب م = ٨ سم ، حـ ء = ٩ سم

أوجد : طول كل من ء م ، م هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



ا ء // ب حـ ، ق (∠ ب ا حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء ا حـ) = ٣٠°

أثبت أن : ا حـ > ب حـ

---

٥ فى الشكل المقابل :



ا ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ا حـ = ١٨ سم

، ء ، هـ منتصفا ا حـ ، ب حـ على الترتيب

أوجد بالبرهان : ١ طول كل من ب ء ، ا ب ، ء هـ

٢ محيط Δ ا ب ء

٦ محافظة المنوفية

إدارة السنطة التوجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل :

١ إذا كان محيط مثلث متساوى الأضلاع = س سم فإن طول ضلعه = ... سم

٢ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....°

٣ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين يكون .... ، ....

٤ أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية هو ....

٥ متوسطات المثلث تتقاطع جميعًا فى ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع فإن : ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٣٦٠

٢ إذا كان قياس زاوية الرأس فى مثلث متساوى الساقين = ٦٠° فإن عدد محاور تماثله = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

٣ فى المثلث س ص ع ، ق (∠ س) = ١٠٠° ، س ص = س ع فإن : ق (∠ ع) = ...°

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٦٠ (د) ٤٠

٤ فى المثلث القائم الزاوية طول الوتر يساوى .... طول الضلع المقابل لزاوية قياسها ٣٠°

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ٢ (د) ١

٥ الأطوال ٥ سم ، ٧ سم ، .... سم تصلح أطوال أضلاع مثلث.

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ١

٦ فى المثلث أ ب حـ إذا كان : ق (∠ أ) > ق (∠ حـ) فإن : أ ب .... ب حـ

(أ) ≤ (ب) < (جـ) = (د) >

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{أ حـ}$

، ق (∠ حـ) = ٣٠°

أثبت أن : △ أ ب ء متساوى الأضلاع.

(ب) △ س ع ص فيه : ق (∠ س) = ٤٥° ، ق (∠ ع) = ٧٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث ترتيبًا تنازليًا.

٤ (أ) المثلث أ ب ج فيه : أ ب = أ ج ، ق(∠ ب) = ٢ س + ١٣ ، ق(∠ ج) = ٣ س − ١٧

أوجد : ق(∠ أ)

(ب) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب < أ ء

، ب ج < ء ج

أثبت أن : ق(∠ أ ب ج) > ق(∠ أ ء ج)

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



س ص = س ع ، ص ع = ع ل = ص ل

، ق(∠ س ص ل) = ١١٠°

أوجد بالبرهان : ق(∠ س)

(ب) فى الشكل المقابل :



ق(∠ ب) = ٩٠° ، هـ ، م منتصفا $\overline{أء}$ ، $\overline{جء}$ على الترتيب

، ق(∠ أ ج ب) = ٣٠°

أثبت أن : أ ب = هـ م

٧ محافظة الغربية

إدارة شرق طنطا
توجيه الرياضيات - صباحى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

[١] إذا كانت : ∠ س تتمم ∠ ص وكان : ق(∠ س) = ٤٠° فإن : ق(∠ ص) = ...

(أ) ١٤٠° (ب) ٥٠° (ج) ٤٠° (د) ٩٠°

[٢] أ ب ج مثلث فيه : ق(∠ ب) = ٩٠° ، ٢ أ ب − أ ج = صفر فإن : ق(∠ ج) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٨٠°

[٣] مثلث متساوى الساقين قياس إحدى زواياه ٦٠° فإن عدد محاور تماثله يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ١ (د) صفر

[٤] المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣ سم ، (س + ٢) سم ، ٧ سم يكون متساوى الساقين عندما س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٣

[٥] س ص ع مثلث فيه : ق(∠ ع) = ٧٠° ، ق(∠ ص) = ٦٠° فإن : ص ع .... س ص

(أ) > (ب) < (ج) = (د) ≤

٦ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة .... من جهة القاعدة

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

١ أكمل ما يأتى :

١ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى .... °

٢ فى ∆ أ ب جـ يكون : أ ب + ب جـ .... أ جـ

٣ محيط المربع الذى طول ضلعه ٥ سم يساوى .... سم.

٤ إذا كانت : جـ ∈ محور تماثل أ ب فإن : جـ أ .... جـ ب

٥ فى ∆ س ص ع إذا كان : س ع < س ص فإن : ق (∠ ص) .... ق (∠ ع)

٢ (أ) فى الشكل المقابل :



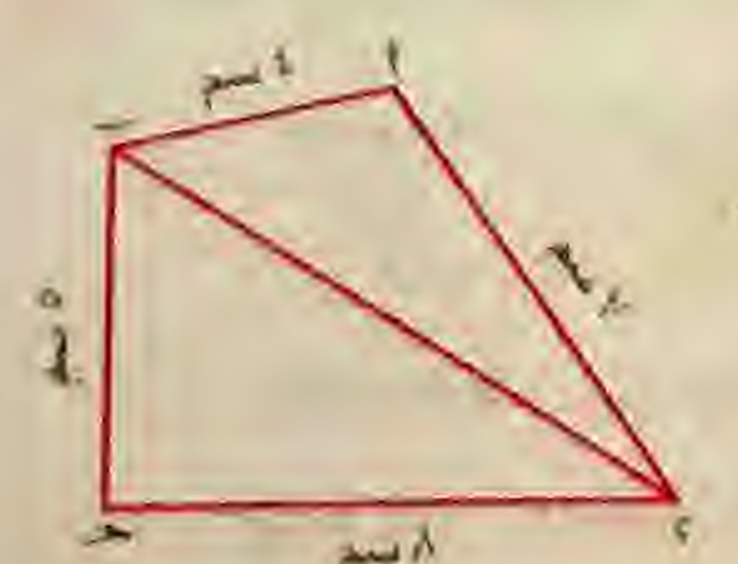
ق (∠ ب) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠°

، ق (∠ أ جـ ب) = ٣٠°

، هـ منتصف أ جـ

أثبت أن : أ ب = ء هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم

، جـ ء = ٨ سم ، ء أ = ٧ سم

أثبت أن : ق (∠ أ ب جـ) > ق (∠ أ ء جـ)

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



∆ س ص ع فيه

س ء ، ص هـ متوسطان يتقاطعان فى م حيث

م ء = ٥ سم ، ص هـ = ١٢ سم

، س ص = ١٧ سم

أوجد بالبرهان : محيط ∆ م س ص

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = ب جـ = أ جـ

، ق (∠ هـ) = ٣٠°

أثبت أن ∆ جـ ء هـ متساوى الساقين.

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



أب = أحـ ، ق(∠ د) = ٢٥°

، ق(∠ د أ ب) = ٤٠°

أثبت أن : ق(∠ د أ حـ) = ٩٠°

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أد}$ // $\overline{ب حـ}$

، ق(∠ د هـ أ د) = ٧٠°

، ق(∠ د أ حـ) = ٥٠°

أثبت أن : أحـ > أب

٨ محافظة الدقهلية

إدارة غرب المنصورة

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة ٤ : .... من جهة الرأس.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣) △ أ ب حـ فيه : أب = أحـ إذا كان : ق(∠ أ) = ٨٠° فإن : ق(∠ ب) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

(٤) فى △ أ ب حـ إذا كان : أب > ب حـ فإن : ق(∠ حـ) .... ق(∠ أ)

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≥

(٥) إذا كانت : حـ ∈ محور تماثل $\overline{أب}$ فإن : أحـ − ب حـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٢

(٦) مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوى (د) ضعف

٢ أكمل ما يأتى :

(١) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

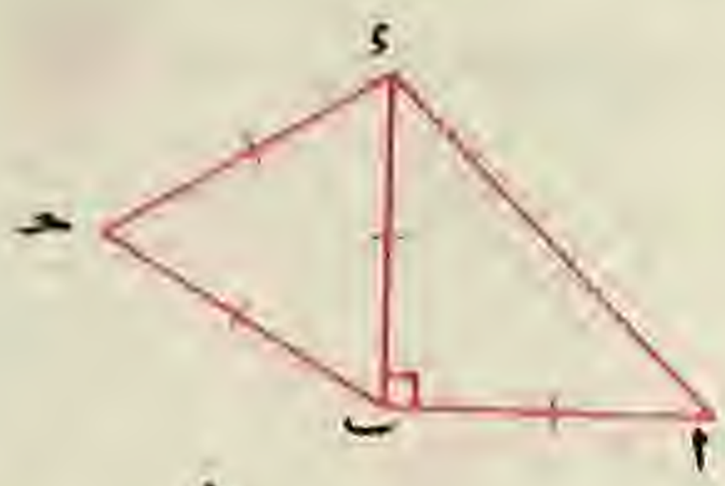
(٢) △ أ ب حـ فيه : ق(∠ أ) = ١٠٠° فإن أكبر أضلاعه طولًا هو ....

٣ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون ....

٤ أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً هو ....

٥ إذا كان طولا ضلعين فى مثلث ٢ سم ، ٧ سم فإن : .... < طول الضلع الثالث < ....

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ب ء) = ٩٠° ، أ ب = ب ء

، Δ ء ب حـ متساوى الأضلاع

أوجد : ق (∠ أ ء حـ)

(ب) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه :

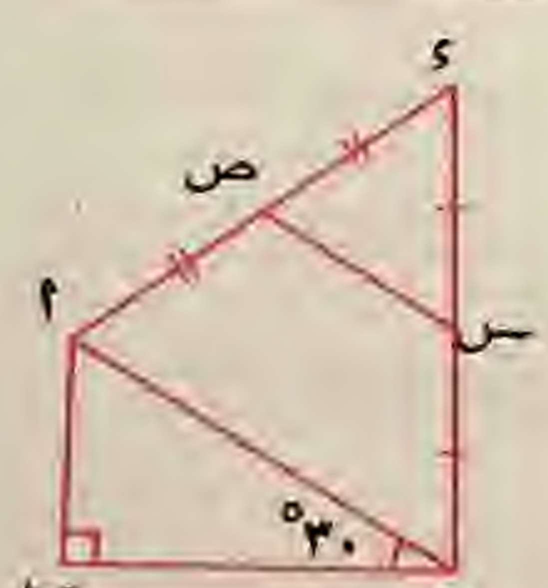
ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب ، $\overline{حـء}$ ∩ $\overline{بهـ}$ = {م}

فإذا كان : حـ ء = ١٨ سم ، ب م = ١٢ سم

، ب حـ = ١٤ سم

أوجد بالبرهان : محيط المثلث م ء هـ

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ أ حـ ب) = ٣٠°

، س ، ص منتصفا $\overline{حـء}$ ، $\overline{أء}$ على الترتيب

أثبت أن : س ص = أ ب

(ب) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ

، هـ ب = هـ حـ

أثبت أن : $\overleftrightarrow{أهـ}$ محور $\overline{ب حـ}$

٥ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

، أ ء = ٧ سم ، حـ ء = ٨ سم

أثبت أن : ق (∠ أ ب حـ) > ق (∠ أ ء حـ)

(ب) المثلث أ ب ء فيه : أ ب = أ ء ، حـ ∈ $\overline{ب ء}$ برهن أن : أ حـ < أ ء

٩ محافظة بورسعيد

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مربع طول ضلعه عدد صحيح فإن محيطه يمكن أن يكون .... سم.

(أ) ٢٣ (ب) ٤٤ (جـ) ٥٥ (د) ٦٦

٢ الزاوية الحادة تكملها زاوية ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) منعكسة.

٣ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٤ مجموعة الأعداد التى تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث هى ....

(أ) ٤ ، ٦ ، ١٠ (ب) ٤ ، ٦ ، ٨

(جـ) ١ ، ١ ، ٦ (د) ٤ ، ٥ ، ١٠

٥ إذا كانت ٢ تقع على محور $\overline{\text{س ص}}$ فإن ٢ س .... ٢ ص

(أ) // (ب) ⊥ (جـ) = (د) ≠

٦ زاوية قاعدة المثلث المتساوى الساقين تكون ....

(أ) منفرجة. (ب) قائمة. (جـ) حادة. (د) جميع ما سبق.

٢ أكمل ما يأتى :

١ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ....°

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ١٢٠° فإن أكبر الأضلاع طولاً هو ....

٣ ٢ ب حـ مثلث فيه : ٢ ب = ٤ سم ، ٢ حـ = ٧ سم فإن ب حـ ∈] .... ، .... [

٤ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون ....

٥ طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس الزاوية القائمة يساوى ....

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

٢ء = ٢ حـ = حـ ء ، ٢ ب = ب حـ

، ق (∠ ب) = ٤٠°

أوجد : ق (∠ ب ٢ ء) بالبرهان.



(ب) فى الشكل المقابل :



و ، هـ منتصفا أب ، أجـ على الترتيب

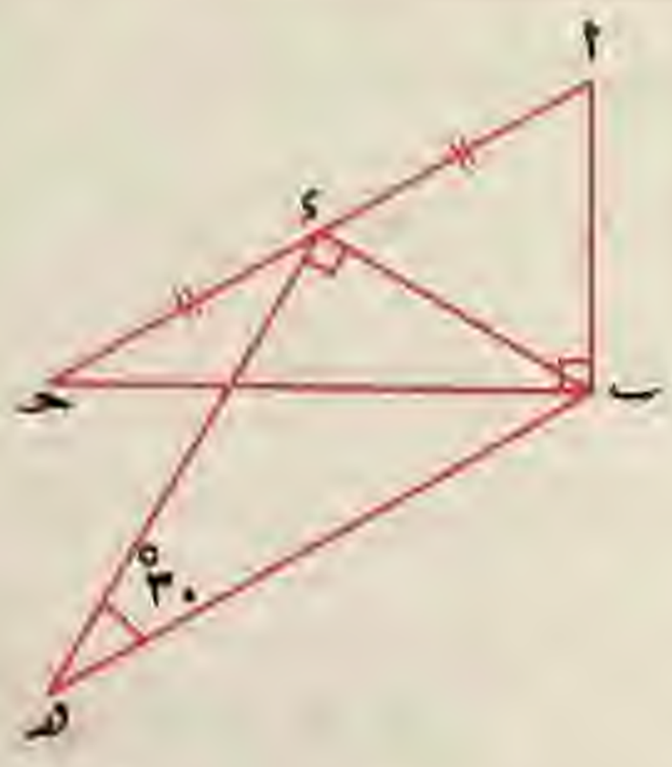
فى المثلث أ ب جـ حيث ب م = ٥ سم

، جـ م = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم

أوجد : محيط المثلث م هـ و بالبرهان.

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ ب د هـ) = ٩٠°

، ق (∠ هـ) = ٣٠°

، د منتصف أجـ

أثبت أن : أجـ = ب هـ

(ب) فى الشكل المقابل :



د هـ // أجـ

، ق (∠ جـ ب د) = ١١٠°

، ق (∠ أ د هـ) = ٥٥°

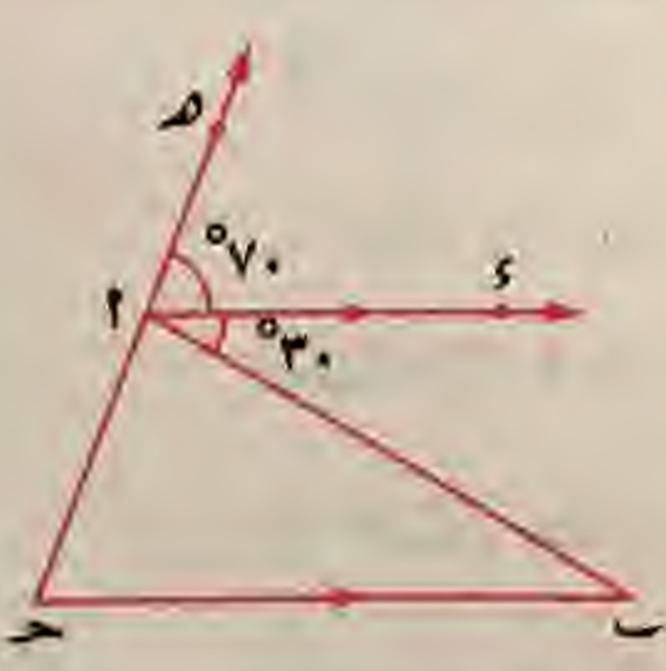
أثبت أن : المثلث أ ب جـ متساوى الساقين.

---

٥ (أ) أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أجـ = ٨ سم ، ب جـ = ٧ سم

رتب قياسات زوايا المثلث تصاعديًا.

(ب) فى الشكل المقابل :



أد // ب جـ ، ق (∠ هـ أ د) = ٧٠°

، ق (∠ ب أ د) = ٣٠°

برهن أن : أ ب > أجـ

١٠ محافظة دمياط

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتساوى الساقين ٨٠° فإن قياس زاوية القاعدة يساوى .... °

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) ٦٠

٢ أء متوسط فى المثلث أ ب حـ ، م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فإن : أ م .... أء

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٣ مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٧ سم ، ٣ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ٣

٤ عدد أقطار الشكل الرباعى يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

٥ أ ب حـ مثلث فيه : ق (∠ ب) = ٧٠° ، ق (∠ حـ) = ٥٠° فإن : أ ب .... أ حـ

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ≤

٦ عدد محاور تماثل الشكل المقابل يساوى ....



(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ١

٢ أكمل ما يأتى :

١ منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ....

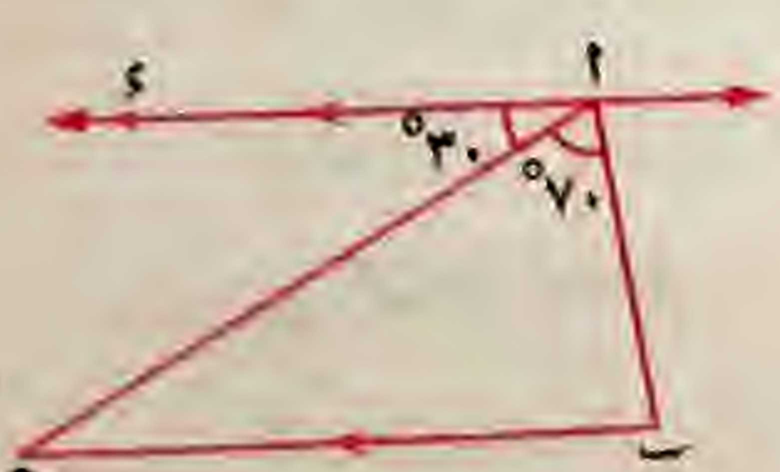
٢ عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية يساوى ....

٣ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم فإن : أ حـ ∈] .... ، .... [

٤ أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه : ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ٢٠٠° فإن : ق (∠ ب) = ...°

٥ محور تماثل القطعة المستقيمة هو المستقيم .... من منتصفها.

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء أ جـ) = ٣٠°

أثبت أن : أ حـ > ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل :

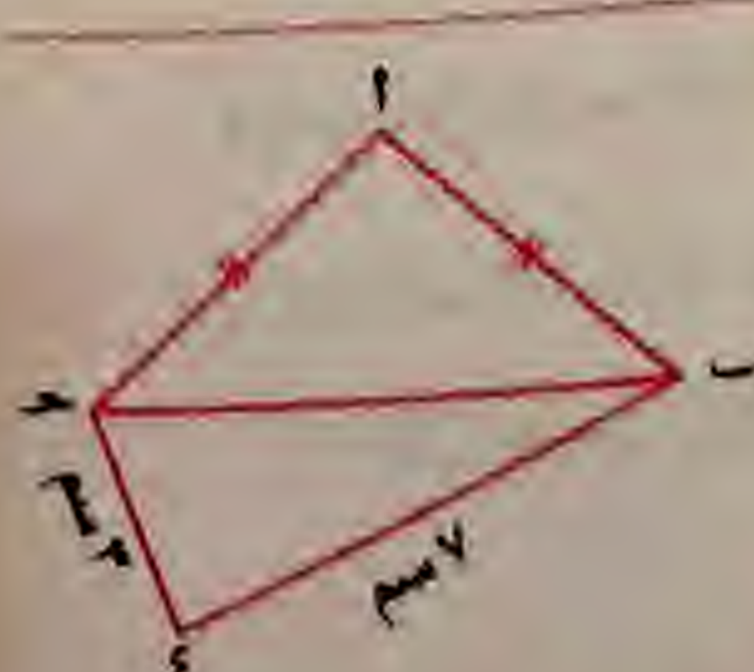


$\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق (∠ أ هـ ء) = ١٠٠°

، هـ ء = هـ حـ

أوجد : ق (∠ أ)

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



أ ب = أ حـ ، ب ء = ٧ سم

، ء حـ = ٣ سم

أثبت أن : ق (∠ أ حـ ء) > ق (∠ أ ب ء)

(ب) في الشكل المقابل :

$\triangle$ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب ، ء منتصف $\overline{أح}$

، أ ح = ١٠ سم ، ق (∠ ح) = ٣٠°

أوجد : محيط المثلث أ ب ء



٤ (أ) في الشكل المقابل :

$\overline{ب هـ}$ ، $\overline{ح ء}$ متوسطان في $\triangle$ أ ب ح

فإذا كان : ب م = ٨ سم ، ح ء = ٩ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ء م}$ ، $\overline{م هـ}$



(ب) في الشكل المقابل :

$\triangle$ أ ب ح فيه :

ق (∠ ب) > ق (∠ ح)

، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب ح}$

أثبت أن : أ ص > أ س



١١ محافظة البحيرة

إدارة المحمودية
مدرسة المفتش

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الزاوية الحادة تتممها زاوية ....

(أ) حادة. (ب) قائمة. (ج) منفرجة. (د) منعكسة.

٢ في $\triangle$ أ ب ح : ق (∠ ب) = ٩٠° ، أ ح = ٢٠ سم ، $\overline{ب ء}$ متوسط

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ٦ (د) ٥

٣ المثلث الذي قياسا زاويتين فيه ٤٢° ، ٦٩° يكون عدد محاور تماثله ....

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٤ إذا كان : ق (∠ أ) = ١٠٠° فإن : ق (∠ أ) المنعكسة = ...

(أ) ٨٠° (ب) ١٨٠° (ج) ٢٦٠° (د) ٣٦٠°

٥ مثلث متساوي الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم فإن محيطه .... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (ج) ٢٠ (د) ٣٢

(٦) Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم فإن : أ حـ ∈ ....

(أ)]٣ ، ٥[(ب)]٢ ، ٨[(جـ)]٢ ، ٥[(د)]٥ ، ٨[

٢ أكمل ما يلى لتكون العبارات صحيحة :

(١) المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديًا على قاعدته .... ، ....

(٢) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(٣) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث متساوى الساقين ١٠٠° فإن قياس إحدى الزاويتين الأخريين ....°

(٤) المضلع الذى ليس له أقطار هو ....

(٥) بعد أى نقطة عن مستقيم معلوم هو طول .... المرسوم من هذه النقطة إلى هذا المستقيم المعلوم.

٣ (أ) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه :

ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

، ء منتصف $\overline{أ حـ}$ ، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$ ، أ حـ = ٩ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{أ ب}$

(ب) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه :

أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

، ق (∠ ب أ ء) = ٢٥° ، ب حـ = ٤ سم

أوجد : ق (∠ ء أ حـ) ، طول $\overline{ء حـ}$

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{ب ء}$ ينصف ∠ أ ب حـ ، $\overline{هـ ء}$ // $\overline{ب حـ}$

، هـ ∈ $\overline{أ ب}$

أثبت أن : Δ هـ ب ء متساوى الساقين.

(ب) فى الشكل المقابل :



س ص = س ل ، ع ص = ع ل

، م ص = م ل

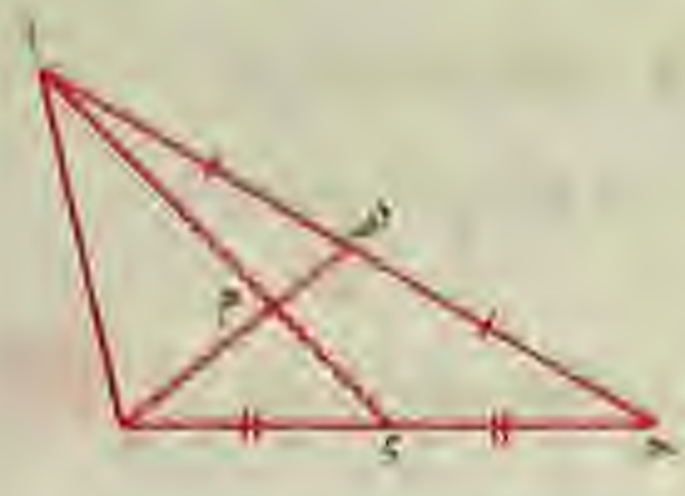
أثبت أن : س ، م ، ع على استقامة واحدة.

(أ) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب هـ}$ متوسطان

، $\overline{أ ء} \cap \overline{ب هـ} = \{م\}$ ، م ء > م هـ

أثبت أن : ق (∠ م أ ب) > ق (∠ م ب أ)



(ب) Δ أ ب حـ فيه ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، رتب أطوال أضلاع المثلث تصاعدياً

١٢ محافظة بنى سويف

إدارة الواسطى
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد محاور تماثل المثلث المتساوى الساقين ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ١٢

٣ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث.

(أ) أكبر من (ب) أصغر من (جـ) يساوى (د) ضعف

٤ قياس الزاوية الخارجة عن مثلث متساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٥°

٥ إذا كانت م نقطة تلاقى المتوسطات فى المثلث أ ب حـ وكان : $\overline{أ ء}$ متوسطاً طوله ٩ سم

فإن : أ م = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢

٦ فى الشكل المقابل :



س + ص = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٤٠°

(جـ) ١٨٠° (د) ٢٨٠°

٢ أكمل ما يأتى :

١ زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين ....

٢ أكبر أضلاع المثلث القائم الزاوية طولاً يسمى .... ويقابل الزاوية القائمة.

٣ إذا اختلف قياسا زاويتين فى مثلث فأكبرهما فى القياس تقابل الضلع .... فى الطول

٤ في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوي .... طول الوتر.

٥ المثلث ٢ب حـ فيه : ٢ب = ب حـ ، ق (∠٢) = ٧٠° فإن : ق (∠حـ) = ...°



٣ **(أ) في الشكل المقابل :**

رتب زوايا المثلث ٢ب حـ ترتيبًا تنازليًا.



(ب) في الشكل المقابل :

ق (∠٢) = ٥٠° ، ٢ب = ٢حـ

، المثلث ء ب حـ متساوي الأضلاع.

أوجد : ق (∠٢ب ء)

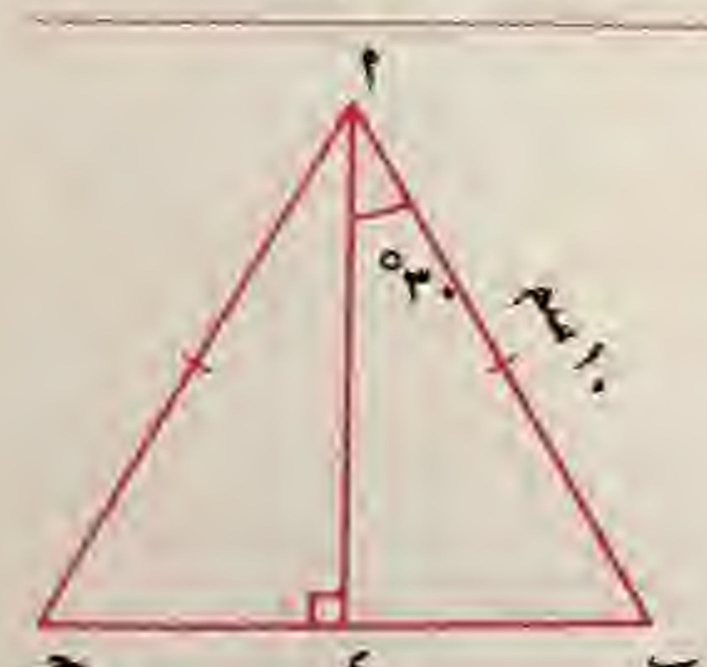


٤ **(أ) في الشكل المقابل :**

احسب محيط المثلث حيث

٢ب = ٢حـ ، ب حـ = ١٠ سم

(ب) أوجد الفترة التي ينتمي إليها طول الضلع الثالث في مثلث طولا ضلعين فيه ٧ سم ، ٩ سم.



٥ **(أ) في الشكل المقابل :**

إذا كان : ٢ب = ١٠ سم

فما طول $\overline{\text{ب حـ}}$ ؟

(ب) برهن أن : ٩ سم ، ٧ سم ، ٨ سم تصلح أطوال أضلاع مثلث مرسوم.

١٣ محافظة أسيوط

إدارة ديروط
توجيه الرياضيات - مسائي

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

١ مثلث متساوي الساقين طولا ضلعين فيه ٩ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١١

٢ في Δ ٢ب حـ إذا كان : ٢ب > ب حـ فإن : ق (∠٢) .... ق (∠حـ)

(أ) ≤ (ب) = (جـ) > (د) <

٣ عدد محاور تماثل المثلث متساوى الأضلاع يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم المتوسط بنسبة ٢ : ١ من جهة ....

(أ) الرأس. (ب) القاعدة. (جـ) الارتفاع. (د) محور التماثل.

٥ عدد الزوايا الحادة فى الشكل



يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٦ مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة واحدة يساوى ....°

(أ) ٣٠٦ (ب) ٣٦٠ (جـ) ٦٠٣ (د) ٦٣٠

---

٢ أكمل ما يأتى :

١ طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى .... طول الوتر.

٢ أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية هو ....

٣ قياس الزاوية الخارجة عن أى رأس فى المثلث متساوى الأضلاع يساوى ....°

٤ الزاويتان المتتامتان مجموع قياسيهما يساوى ....°

٥ متوسط المثلث متساوى الساقين المرسوم من الرأس يكون .... على القاعدة.

٣

(أ) س ص ع مثلث فيه : ق (∠ س) = ٥٥° ، ق (∠ ص) = ٤٥° ، رتب تصاعديًا أطول أضلاعه.

(ب) فى الشكل المقابل :



أء = ء جـ = ب جـ = ب ء

، ق (∠ أ ء ب) = ٥٠°

أوجد : ق (∠ أ ب جـ)

٤

(أ) فى الشكل المقابل :



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، ء منتصف $\overline{أ جـ}$

، أ جـ = ١٠ سم ، ق (∠ جـ) = ٣٠°

أوجد بالبرهان : محيط Δ أ ب ء

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق (∠ هـ أ ء) = ٧٠°

، ق (∠ ء أ جـ) = ٥٠°

أثبت أن : أ جـ > أ ب



٥ **(أ)** في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق(∠د أ ب) = ٤٠°

، ب أ = ب جـ

أوجد : ق(∠جـ)



(ب) في الشكل المقابل

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ جـ}$

، ب ص = ١٢ سم

، م جـ = ٦ سم

أوجد بالبرهان : م ص ، م س

١٤ محافظة سوهاج

إدارة سوهاج
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتي :

[١] إذا كان : ق(∠ب) = ١١٠° فإن ق(∠ب) المنعكسة = ... °

[٢] نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة ....

[٣] المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون ....

[٤] إذا كانت ∠أ ، ∠ب زاويتين متكاملتين ، ق(∠أ) = ق(∠ب) فإن ق(∠أ) = ... °

[٥] أطول أضلاع المثلث القائم الزاوية هو ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] متممة الزاوية التي قياسها ٥٠° زاوية قياسها يساوي

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ١٣٠° (د) ١٠٠°

[٢] المثلث المتساوي الساقين قياس إحدى زاويتي قاعدته ٧٠° فإن قياس زاوية رأسه

(أ) ٧٠° (ب) ١١٠° (جـ) ٢٠° (د) ٤٠°

[٣] عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) لا شيء

[٤] إذا كان أ ب جـ مثلثًا فيه أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٧ سم فإن ب جـ ∈

(أ)]٦ ، ١٣[(ب)]٦ ، ٧[(جـ)]١ ، ١٣[(د)]١ ، ٧[

٥ مثلث متساوى الساقين طولا ضلعين فيه ٨ سم ، ٤ سم فإن طول الضلع الثالث .... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٣ (د) ١٢

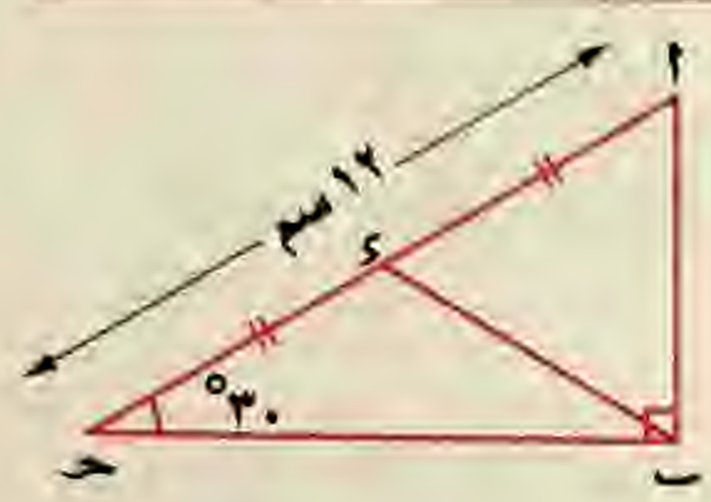
٦ المثلث الذى له ثلاثة محاور تماثل هو مثلث ....

(أ) مختلف الأضلاع. (ب) متساوى الأضلاع.

(جـ) قائم الزاوية. (د) متساوى الساقين.

---

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

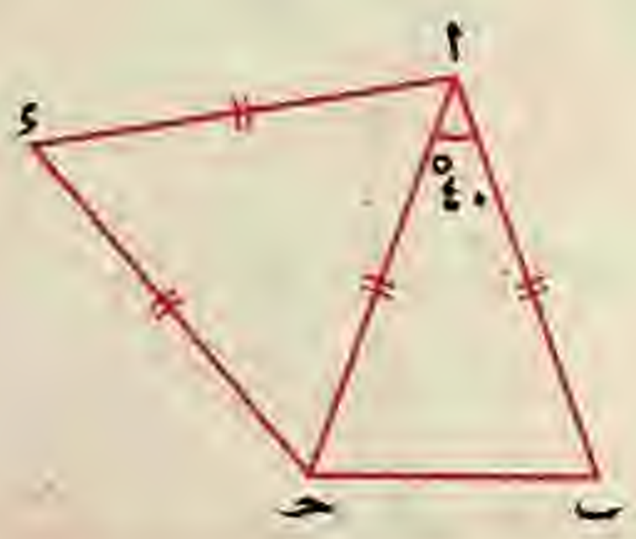


Δ ا ب حـ فيه : ق (∠ ا ب حـ) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

، ق (∠ حـ) = ٣٠° ، ا حـ = ١٢ سم

أوجد : محيط Δ ا ب ء

(ب) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ب ا حـ) = ٤٠° ، ا ب = ا حـ

، Δ ا حـ ء متساوى الأضلاع.

أوجد : ق (∠ ب حـ ء)

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل :



ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ ا حـ ب) = ٣٠°

، هـ منتصف $\overline{\text{ا ء}}$ ، و منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن : ا ب = هـ و

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، ق (∠ حـ ء هـ) = ٥٥°

، ق (∠ ب ا ء) = ١١٠°

أثبت أن : المثلث ا ب حـ متساوى الساقين.

---

٥ (أ) مثلث س ص ع فيه : ق (∠ س) = ٧٠° ، ق (∠ ص) = ٥٠°

رتب أطوال أضلاع المثلث ترتيبًا تصاعديًا.

(ب) فى الشكل المقابل :



ا ء = ٥ سم ، ا ب = ٣ سم

، ء حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

أثبت أن : ق (∠ ا ب حـ) > ق (∠ ا ء حـ)

١٥ محافظة الأحمر

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم فإن أ جـ ∈ ......
(أ)]٢ ، ١٥[(ب)]٢ ، ١٤[(جـ)]٣ ، ١٥[(د)]٣ ، ٥[

٢ عدد محاور التماثل لنصف دائرة هو ......
(أ) ١ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي

٣ إذا كان Δ أ ب جـ فيه : ق(∠أ) = ٩٠° ، أ د متوسط طوله ٣ سم
فإن : طول ب جـ = ... سم
(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ٤،٥ (د) ٣

٤ إذا كان Δ أ ب جـ فيه : ق(∠أ) = ٧٠° ، ق(∠ب) = ٥٠° فإن : ب جـ ...... أ جـ
(أ) < (ب) > (جـ) ≡ (د) =

٥ في المثلث القائم الزاوية مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة يساوي ...... طول الوتر
(أ) ضعف (ب) مربع ضعف (جـ) مربع (د) نصف مربع

٦ عدد متوسطات المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين يساوي ......
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢ أكمل ما يأتي :

١ المستقيم المار برأس المثلث المتساوي الساقين عمودياً على القاعدة يكون [illegible] ......

٢ في Δ أ ب جـ إذا كان : ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠جـ) = ٥٠° فإن أكبر الأضلاع طولاً هو ......

٣ صورة النقطة (١ ، −٢) بالانعكاس في محور السينات هي ......

٤ في المثلث القائم الزاوية أكبر أضلاعه طولاً هو ......

٥ في المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوي ...... طول الوتر

٣ (أ) في الشكل المقابل :



هـ و = ٥ سم ، هـ م = ٢ سم
، ب و = ١٢ سم
، هـ منتصف أ ب
، و منتصف أ جـ
أوجد : محيط Δ ب م جـ

(ب) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ فيه : ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

، ق (∠ جـ) = ٣٠° ، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسط

، أ جـ = ١٢ سم

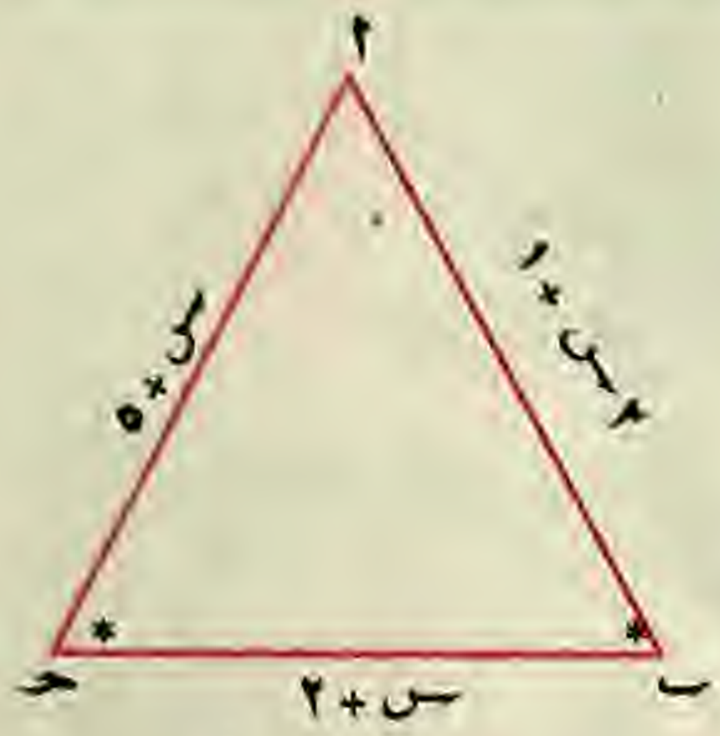
أوجد : محيط Δ أ ب ء



٤ (أ) فى الشكل المقابل :

ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)

أوجد : محيط Δ أ ب جـ مبينًا بالبرهان طول كل ضلع.



(ب) فى الشكل المقابل :

من المعطيات التى على الرسم

أوجد بالبرهان : ق (∠ ء أ ب)



٥ (أ) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه :

ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ء ب = ء أ

أثبت أن : ب جـ > أ جـ



(ب) فى الشكل المقابل :

أ ء = ء جـ ، ء ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$

، أ ء > ب ء

برهن أن : ∠ أ ب جـ منفرجة.

